Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 15. 11. 2012

Matematika – univerzitetni študij

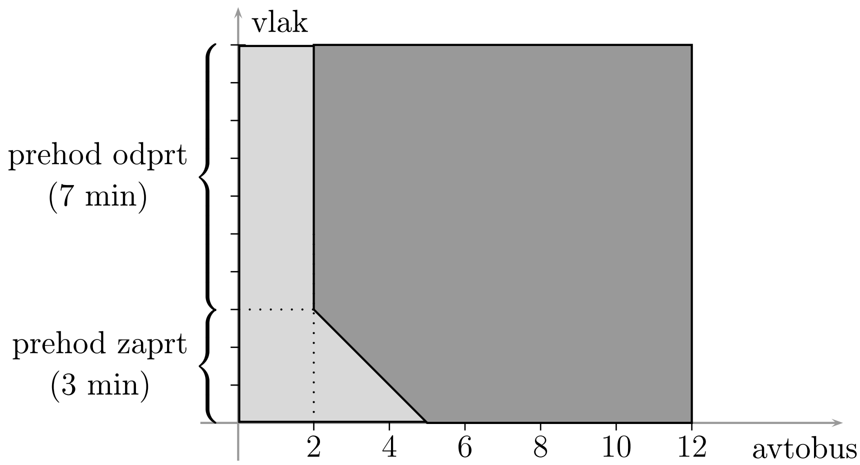
1. Dogodek, da Albert dobi dvoboj, ustreza naslednjim potekom partij:

$$AA\,,\ ABAA\,,\ ABABAA\,,\ldots \quad \text{in} \quad BAA\,,\ BABAA\,,\ BABABAA\,,\ldots$$

Verjetnost iskanega dogodka je torej enaka:

$$\left[1+\frac{2}{3}\right]\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)^4+\cdots\right]\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{21}\doteq 0{\cdot}238\,.$$

2. Marina bo prišla še pravočasno, če ji bo čakanje na avtobus skupaj s čakanjem na vlak vzelo največ 10 minut. Verjetnostni prostor lahko predstavimo s pravokotnikom na ravnini, kjer abscisa predstavlja čas, ki je minil od odhoda zadnjega avtobusa, ordinata pa zaprtost prehoda oz. koliko časa je prehod že odprt:



Verjetnost, da Marina pride še pravočasno, je torej enaka $\dfrac{191}{240}\doteq 0{\cdot}796$.

3. a) $\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{\binom{30}{1}\binom{20}{4}}{\binom{50}{5}}+\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{\binom{30}{2}\binom{20}{3}}{\binom{50}{5}}+\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\binom{30}{3}\binom{20}{2}}{\binom{50}{5}}+\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{\binom{30}{4}\binom{20}{1}}{\binom{50}{5}}+\dfrac{5}{5}\cdot\dfrac{\binom{30}{5}\binom{20}{0}}{\binom{50}{5}}=\dfrac{3}{5}=0{\cdot}6.$

b) $\dfrac{5}{3}\left[\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{\binom{30}{1}\binom{20}{4}}{\binom{50}{5}}+\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{\binom{30}{2}\binom{20}{3}}{\binom{50}{5}}\right]=\dfrac{5415}{30268}\doteq 0{\cdot}179.$

4. Označimo z A_i dogodek, da ima i-ti igralec vse karte v barvi pika s samimi različnimi vrednostmi. Očitno se lahko zgodita največ dva taka dogodka. Glede na to, da je možnih 10 pikovih lestvic petih kart (od A,2,3,4,5 do 10,J,Q,K,A), za vsak i velja:

$$p_1 := P(A_i) = \frac{10}{\binom{52}{5}} \doteq 3\dot{}847693 \cdot 10^{-6} .$$

Za dva igralca pa je število razporeditev kart prikazano v naslednjih dveh tabelah – v prvi vrstici so prikazane karte prvega igralca, v drugi pa število možnih razporeditev za drugega:

A,2,3,4,5	2,3,4,5,6	3,4,5,6,7	4,5,6,7,8	5,6,7,8,9
4	4	3	2	1

6,7,8,9,10	7,8,9,10,J	8,9,10,J,Q	9,10,J,Q,K	10,J,Q,K,A
1	2	3	4	4

Torej za poljubna različna i in j velja:

$$p_2 := P(A_i \cap A_j) = \frac{28}{\binom{52}{5}\binom{47}{5}} \doteq 7\dot{}023448 \cdot 10^{-12} .$$

Verjetnost iskanega dogodka je torej enaka $10p_1 - \binom{10}{2}p_2 \doteq 3\dot{}847661 \cdot 10^{-5}$.

4P. Naj bo K_i dogodek, da je bila karta, ki je bila pred mešanjem na i-tem položaju v kupu, tam tudi po mešanju. Dogovorimo se, da indeksi $i = 1, 2, 3$ označujejo spodnje tri položaje. Nadalje naj bo A dogodek, da je as po mešanju ostal na istem mestu (to bi bil lahko dogodek K_4). Izračunati moramo pogojno verjetnost dogodka $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ glede na $\bar{A}$.
Pogojno verjetnost dogodka K_i izračunamo tako, da še nadalje pogojujemo glede na to, kje po mešanju pristane as (ne sme pristati na i-tem mestu). Dobimo:

$$P(K_i \mid \bar{A}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9} .$$

Nadalje opazimo, da se lahko zgodita največ dva dogodka K_i (če se zgodijo vsi trije, je tudi as na istem mestu). Za $i \neq j$ velja:

$$P(K_i \cap K_j \mid \bar{A}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18} .$$

Iskana verjetnost je:

$$\begin{aligned} P(K_1 \cup K_2 \cup K_3 \mid \bar{A}) &= P(K_1 \mid \bar{A}) + P(K_2 \mid \bar{A}) + P(K_3 \mid \bar{A}) - \\ &\quad - P(K_1 \cap K_2 \mid \bar{A}) + P(K_1 \cap K_3 \mid \bar{A}) + P(K_2 \cap K_3 \mid \bar{A}) = \\ &= \frac{1}{2} . \end{aligned}$$