Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 5. 2. 2013

Matematika – univerzitetni študij

1. Če z S označimo število dobitkov v prvih 100 stavah, je $S \sim \mathrm{b}(100, 18/37)$. Po teh 100 stavah ima Renato $10S$ žetonov. Če dobi zadnjo stavo (ko stavi desetino žetonov), se mu število žetonov poveča za 10%, če zadnjo stavo izgubi, pa se mu zmanjša za 10%. Iskana verjetnost je tako enaka:

$$
\begin{aligned}
&\frac{18}{37}\,P(11S > 500) + \frac{19}{37}\,P(9S > 500) = \\
&\qquad = \frac{18}{37}\,P\big(S > 45\tfrac{5}{11}\big) + \frac{19}{37}\,P\big(S > 55\tfrac{5}{9}\big) = \\
&\qquad = \frac{18}{37}\,P(S > 45{,}5) + \frac{19}{37}\,P(S > 55{,}5) \approx \\
&\qquad \approx \frac{18}{37}\left[\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{45{,}5 - 100\cdot\frac{18}{37}}{\sqrt{100\cdot\frac{18}{37}\cdot\frac{19}{37}}}\right)\right] + \frac{19}{37}\left[\frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{55{,}5 - 100\cdot\frac{18}{37}}{\sqrt{100\cdot\frac{18}{37}\cdot\frac{19}{37}}}\right)\right] \doteq \\
&\qquad \doteq 0{,}402.
\end{aligned}
$$

2. Najprej iz:

$$1 = \iint_{x>y>1} \frac{c}{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^\infty \int_y^\infty \frac{c}{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{c}{2}$$

ali iz:

$$1 = \iint_{x>y>1} \frac{c}{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^\infty \int_1^x \frac{c}{x^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{c}{2}$$

izračunamo $c = 2$. Nato izračunamo kumulativno porazdelitveno funkcijo:

$$F_Z(z) = \iint_{\substack{x-2y<z \\ x>y>1}} \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Račun lahko dokončamo na vsaj dva načina.

Prvi način:

$$F_Z(z) = \int_{\max\{1,-z\}}^\infty \int_y^{z+2y} \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\max\{-z,1\}} - \frac{1}{2(z + 2\max\{-z,1\})}$$

oziroma:

$$F_Z(z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2z} & ; z \le -1 \\ 1 - \dfrac{1}{2(z+2)} & ; z \ge -1 \end{cases}.$$

Drugi način: za $z \le -1$ velja:

$$F_Z(z) = \int_{-z}^{\infty} \int_{(x-z)/2}^{x} \frac{2}{x^3} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2z} \, ,$$

za $z \ge -1$ pa velja:

$$F_Z(z) = \int_1^{z+2} \int_1^x \frac{2}{x^3} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x + \int_{z+2}^{\infty} \int_{(x-z)/2}^{x} \frac{2}{x^3} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2(z+2)} \, .$$

Seveda dobimo isto kot prej. Ker je F_Z zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, ima Z gostoto:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2z^2} & ; \, z < -1 \\ \dfrac{1}{2(z+2)^2} & ; \, z > -1 \end{cases} \, .$$

3. Naj bo T čas okvare. Tedaj je čas od okvare do kontrole (glede na besedilo naloge) enak $\max\{t_0 - T, 0\}$. Pričakovana vrednost je enaka:

$$E\big[\max\{t_0 - T, 0\}\big] = \int_0^{t_0} (t_0 - t) \, \lambda \, e^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t = t_0 - \frac{1 - e^{-\lambda t_0}}{\lambda} \, .$$

4. *Prvi način.* Za $n = 1, 2, 3, \ldots$ označimo:

$$\begin{aligned} A_{ni} &:= \{\text{v prvih } n-1 \text{ metih nikoli ne pade } i \text{ pik}\} \, , \\ B_{ni} &:= \{\text{v } n\text{-tem metu pade } i \text{ pik}\} \, . \end{aligned}$$

Tedaj je dogodek $\{N = n\}$ unija nezdružljivih dogodkov $(A_{n1} \setminus A_{n6}) \cap B_{n1}$ in $(A_{n6} \setminus A_{n1}) \cap B_{n6}$. Očitno je:

$$P(A_{ni}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \, , \qquad P(B_{ni}) = \frac{1}{6} \, .$$

Nadalje sta dogodka $(A_{ni} \setminus A_{nj})$ in B_{nk} za poljubne i, j in k neodvisna. Dogodka A_{ni} in A_{nj} pa sta odvisna, a za $i \ne j$ velja:

$$P(A_{ni} \cap A_{nj}) = \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} \, .$$

Sledi:

$$P(A_{ni} \setminus A_{nj}) = P(A_{ni}) - P\big(A_{ni} \setminus (A_{ni} \cap A_{nj})\big) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1} \, .$$

Torej velja:

$$P(N = n) = 2 \cdot \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}\right] \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] .$$

Drugi način: izračunamo $P(N > n)$, t. j. verjetnost dogodka, da po n metih še ni padla ena pika ali pa še ni padlo šest pik. Po formuli za verjetnost unije dogodkov za $n = 0, 1, 2, \ldots$ velja:

$$P(N > n) = 2\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n .$$

Torej za $n = 1, 2, 3, \ldots$ velja:

$$P(N = n) = P(N > n-1) - P(N > n) = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] ,$$

kar je isto kot prej.

Opomba. Jasno je, da lahko slučajna spremenljivka N zavzame le vrednosti $2, 3, 4, \ldots$, a zgornjo formulo lahko uporabimo tudi za $n = 1$: pravilno dobimo $P(N = 1) = 0$.

4P. Za verjetnostni prostor lahko postavimo kar $\binom{4}{2} = 6$ enako verjetnih razporeditev asa in fanta v kup štirih kart: ni potrebno ločiti, katera karta je as in katera fant. Očitno lahko slučajna spremenljivka N zavzame le vrednosti 2, 3, ali 4; za n izmed teh vrednosti dogodek $\{N = n\}$ zajema $n-1$ izidov, saj mora biti ena izmed izbranih kart na n-tem položaju od zgoraj, druga pa nad njo. Sklep:

$$N \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} .$$