Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 18. 1. 2010

Matematika – UNI-BOL

1. Označimo $Z := XY$.

Prvi način. Iz formule za gostoto funkcije dveh slučajnih spremenljivk in neodvisnosti dobimo, da je slučajna spremenljivka Z porazdeljena zvezno z gostoto:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \, f_Y\left(\frac{z}{x}\right) \frac{1}{|x|} \, \mathrm{d}x \, .$$

Iz porazdelitve obeh slučajnih spremenljivk dobimo:

$$f_Z(z) = \frac{1}{3} \int_{\substack{1 \le x \le 2 \\ 1 \le z/x \le 4}} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{\substack{1 \le x \le 2 \\ z/4 \le x \le z}} \frac{\mathrm{d}x}{x} \, .$$

Za $1 \le x \le 2$ dobimo:

$$f_Z(z) = \frac{1}{3} \int_1^z \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\ln z}{3} \, ,$$

za $2 \le z \le 4$ dobimo:

$$f_Z(z) = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\ln 2}{3} \, ,$$

za $4 \le z \le 8$ dobimo

$$f_Z(z) = \frac{1}{3} \int_{z/4}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\ln 8 - \ln z}{3} \, ,$$

sicer je $f_Z(z) = 0$. Torej velja:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{3} \ln z & ; \, 1 \le z \le 2 \\ \frac{1}{3} \ln 3 & ; \, 2 \le z \le 4 \\ \frac{1}{3}(\ln 8 - \ln z) & ; \, 4 \le z \le 8 \\ 0 & ; \, \text{sicer} \end{cases} \, .$$

Drugi način. Iz porazdelitve obeh slučajnih spremenljivk in neodvisnosti dobimo, da je kumulativna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke Z enaka:

$$F_Z(z) = \frac{1}{3} \iint_{\substack{1 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 4 \\ xy < z}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \frac{1}{3} \int_1^2 \int_{1 \le y \le \min\{z/x, 4\}} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \, .$$

Za $1 \le x \le 2$ dobimo:

$$F_Z(z) = \frac{1}{3} \int_1^z \int_1^{z/x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int_1^z \left(\frac{z}{x} - 1\right) \mathrm{d}x = \frac{z \ln z - z + 1}{3} \, ,$$

za $2 \le z \le 4$ dobimo:

$$F_Z(z) = \frac{1}{3}\int_1^2 \int_1^{z/x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^2 \left(\frac{z}{x} - 1\right)\mathrm{d}x = \frac{z\ln 2 - 1}{3}\,,$$

za $4 \le z \le 8$ pa dobimo:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{1}{3}\int_1^{z/4}\int_1^4 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int_{z/4}^2\int_1^{z/x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{z}{4} - 1 + \frac{1}{3}\int_{z/4}^2 \left(\frac{z}{x} - 1\right)\mathrm{d}x = \\ &= \frac{z - 5 + z(\ln 8 - \ln z)}{3}\,. \end{aligned}$$

Torej velja:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & ;\ z \le 1 \\ \frac{1}{3}\big(z\ln z - z + 1\big) & ;\ 1 \le z \le 2 \\ \frac{1}{3}\big(z\ln 2 - 1\big) & ;\ 2 \le z \le 4 \\ \frac{1}{3}\big(z - 5 + z(\ln 8 - \ln z)\big) & ;\ 4 \le z \le 8 \\ 1 & ;\ z \ge 8 \end{cases}.$$

Opomba. Brez težav preverimo, da za f_X iz prvega načina in F_X iz drugega načina velja $f_X = F_X'$, torej smo res obakrat dobili isto.

2. Za i-ti sedež definirajmo slučajno spremenljivko X_i, ki je enaka 1, če tisti, ki tam sedi, in njegov desni sosed oba dvigneta roko, sicer pa naj bo $X_i = 0$. Lahko pišemo tudi $X_i = Y_i Y_{i+1}$, kjer je $Y_i = 1$, če tisti, ki sedi na i-tem sedežu, dvigne roko, sicer pa je $Y_i = 0$. V tem primeru se dogovorimo, da sedeže označujemo z elementi iz $\mathbb{Z}_n$, in sicer od leve proti desni. Velja torej:

$$S = X_0 + X_1 + \ldots + X_{n-1} = Y_0Y_1 + Y_1Y_2 + \ldots Y_{n-2}Y_{n-1} + Y_{n-1}Y_0\,.$$

Brž ko je $n \ge 2$, velja $E\,X_i = 1/4$ in ker je matematično upanje aditivno, od tod sledi $E\,S = n/4$. Za $n = 1$ pa je $S = 0$ in zato $E\,S = 0$.

Za izračun disperzije je ugodno vpeljati razdaljo med sedežema: za $k \in \mathbb{Z}_n$ naj bo $|k|$ najmanjše število iz $\mathbb{N}_0$, ki v $\mathbb{Z}_n$ ustreza k ali pa $-k$ (recimo $|n-1| = 1$). Tedaj je razdalja med sedežema i in j enaka $|i-j|$ (ni se težko prepričati, da je to metrika na $\mathbb{Z}_n$). Od tod naprej lahko računamo na vsaj dva načina.

Prvi način. Najprej izračunamo:

$$E\,S^2 = \sum_{i\in\mathbb{Z}_n}\sum_{j\in\mathbb{Z}_n} E(X_iX_j)\,.$$

Če je $i = j$, je $E(X_iX_j) = 1/4$. Če je $|i-j| = 1$ in $n \ge 3$, je $E(X_iX_j) = 1/8$ (saj recimo za $j = i+1$ velja $X_i = Y_iY_{i+1}^2Y_{i+2} = Y_iY_{i+1}Y_{i+2}$). Če pa je $|i-j| \ge 2$, velja

$E(X_i X_j) = 1/16$. Brž ko je $n \geq 3$, je za vsak $i \in \mathbb{Z}_n$ natanko en indeks $j \in \mathbb{Z}_n$ enak i, za natanko dva velja $|i - j| = 1$, za preostalih $n - 3$ indeksov pa velja $|i - j| \geq 2$. Sledi:

$$E\, S^2 = n \left(\frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + (n-3) \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{n^2 + 5n}{16}$$

in končno:

$$D(S) = E\, S^2 - (E\, S)^2 = \frac{5n}{16}\,.$$

Drugi način. Nastavimo:

$$D(S) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_n} \sum_{j \in \mathbb{Z}_n} K(X_i, X_j)\,.$$

Če je $i = j$, je $K(X_i, X_j) = D(X_i) = 3/16$. Če je $|i - j| = 1$ in $n \geq 3$, izračunamo $K(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - (E\, X_i)(E\, X_j) = 1/16$. Za $|i - j| \geq 2$ pa sta slučajni spremenljivki X_i in X_j neodvisni, torej je $K(X_i, X_j) = 0$. Podobno kot pri prvem načinu seštejemo (za $n \geq 3$):

$$D(S) = n \left(\frac{3}{16} + 2 \cdot \frac{1}{16} \right) = \frac{5n}{16}\,.$$

Za $n = 1$ posebej dobimo, da je $D(S) = 0$, za $n = 2$ pa je

$$S \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

in zato $D(S) = 3/4$.

3. a) Zaradi linearnosti matematičnega upanja velja:

$$E\big[(X - X')(Y - Y')\big] = E(XY) - E(XY') - E(X'Y) + E(X'Y')\,.$$

Nadalje zaradi neodvisnosti velja:

$$E\big[(X - X')(Y - Y')\big] = E(XY) - (E\, X)(E\, Y') - (E\, X')(E\, Y) + E(X'Y')\,.$$

Ker je slučajni vektor (X', Y') porazdeljen enako kot (X, Y), končno velja:

$$E\big[(X - X')(Y - Y')\big] = E(XY) - (E\, X)(E\, Y) - (E\, X)(E\, Y) + E(XY) = 2\, K(X, Y)\,.$$

b) Iz prejšnje točke sledi:

$$K(X, Y) = \frac{1}{2}\, E\Big[\big(f(X) - f(X')\big)\big(g(X) - g(X')\big)\Big]\,. \qquad (*)$$

Če je $X \geq X'$, iz monotonosti funkcij f in g sledi $f(X) \geq f(X')$ in $g(X) \geq g(X')$, torej $\big(f(X) - f(X')\big)\big(g(X) - g(X')\big) \geq 0$. Če pa je $X \leq X'$, velja $f(X) \leq f(X')$ in $g(X) \leq g(X')$, torej prav tako $\big(f(X) - f(X')\big)\big(g(X) - g(X')\big) \geq 0$. Zato je desna stran v $(*)$ vedno nenegativna.

4. *Prvi način.* Iz rodovne funkcije:

$$G_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{\lambda(s-1)}$$

in njenih odvodov:

$$G_X^{(r)}(s) = \lambda^r e^{\lambda(s-1)}$$

dobimo:

$$E\big[X(X-1)(X-2)\cdots(X-r+1)\big] = \lambda^r\,.$$

Sledi:

$$\begin{aligned} E\,X &= \lambda \\ E\,X^2 &= E\big[X(X-1)\big] + E\,X = \lambda^2 + \lambda \\ E\,X^3 &= E\big[X(X-1)(X-2)\big] + 3\,E\,X^2 - 2\,E\,X = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda\,. \end{aligned}$$

Torej velja:

$$E\big[(X - E\,X)^3\big] = E\,X^3 - 3(E\,X^2)(E\,X) + 2(E\,X)^3 = \lambda\,.$$

Drugi način. Pomagamo si z momentno-rodovno funkcijo:

$$M_X(t) = G_X(e^t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

Z zaporednim odvajanjem dobimo:

$$\begin{aligned} M_X'(t) &= \lambda e^{\lambda(e^t-1)+t}\,, \\ M_X''(t) &= \lambda^2 e^{\lambda(e^t-1)+2t} + \lambda e^{\lambda(e^t-1)+t}\,, \\ M_X'''(t) &= \lambda^3 e^{\lambda(e^t-1)+3t} + 3\lambda^2 e^{\lambda(e^t-1)+2t} + \lambda e^{\lambda(e^t-1)+t}\,, \end{aligned}$$

od koder sledi:

$$E\,X^3 = M_X'''(0) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

in tako kot pri prvem načinu dobimo iskani rezultat.

Tretji način. Spomnimo se, da je tretji centralni moment enak tretji kumulanti, torej:

$$E\big[(X - E\,X)^3\big] = \kappa_3 = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\bigg|_{t=0} \ln M_X(t) = \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}\bigg|_{t=0} \big[\lambda(e^t-1)\big] = \lambda e^t\Big|_{t=0} = \lambda\,.$$

(vse kumulante Poissonove porazdelitve $\mathrm{P}(\lambda)$ so enake λ).