Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 12. 1. 2012

Matematika – univerzitetni študij

1. Za $k = 1, 2, \ldots 9$ velja:

$$\begin{aligned} P(D = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(k \cdot 10^n \le \frac{1}{U} \le (k+1) \cdot 10^n\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\frac{1}{(k+1) \cdot 10^n} \le U \le \frac{1}{k \cdot 10^n}\right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \\ &= \frac{10}{9k(k+1)} \,. \end{aligned}$$

2. Iz $Y = X\left(\dfrac{1}{Z} - 2\right)$ dobimo:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, f\left(x\left(\frac{1}{z} - 2\right)\right) \left|\frac{x}{z^2}\right| \mathrm{d}x \,.$$

Očitno Z skoraj gotovo zavzame vrednosti iz $(0, 1/2)$. Za z iz tega intervala po krajšem računu dobimo:

$$f_Z(z) = \frac{\lambda^2}{z^2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1/z-1)x}\, x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{(1-z)^2}$$

(neodvisno od λ – zakaj?) Sledi:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{(1-z)^2} & ;\ 0 < z < \frac{1}{2} \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases} .$$

3. *Prvi način.* Obstaja $\binom{9}{3} = 84$ razporeditev treh križcev v 9 polj. Preštejmo razporeditve pri posameznih vrednostih slučajne spremenljivke S:

- $S = 0$: vse vrstice in vsi stolpci so zapolnjeni, kar ustreza razporeditvam, pri katerih v vsako vrstico damo po en križec, obenem pa jih damo tudi v same različne stolpce: 6 razporeditev.
- $S = 1$: lahko imamo nič praznih vrstic in en prazen stolpec ali pa obratno. Za vsako možnost imamo po $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ razporeditev, skupaj 36.
- $S = 2$: lahko imamo dve prazni vrstici in nič praznih stolpcev (3 razporeditve), obratno (spet 3 razporeditve) ali pa eno prazno vrstico in en prazen stolpec ($3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ razporeditev). Skupaj 42 razporeditev.

Dovolj je sicer prešteti razporeditve za samo dve vrednosti slučajne spremenljivke S. Torej je:

$$S \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{6}{84} & \frac{36}{84} & \frac{42}{84} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{14} & \frac{6}{14} & \frac{7}{14} \end{pmatrix}$$

in $E(S) = \dfrac{20}{14} = \dfrac{10}{7}$.

Drugi način. Označimo z X število vrstic, z Y pa število stolpcev, ki ostanejo prazni. Tedaj je $S = X + Y$. Spet preštevamo razporeditve:

- $X = 0$: v vsako vrstico damo po en križec: $3^3 = 27$ razporeditev.
- $X = 1$: v eno vrstico gresta dva križca, v eno en križec, v eno pa noben križec. Dobimo $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 54$ razporeditev.
- $S = 2$: v eno vrstico gredo vsi trije križci: 3 razporeditve.

Torej sta slučajni spremenljivki X in Y obe porazdeljeni diskretno s shemo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{27}{84} & \frac{54}{84} & \frac{3}{84} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{9}{28} & \frac{18}{28} & \frac{1}{28} \end{pmatrix}$$

iz katere dobimo $E(X) = E(Y) = \dfrac{20}{28} = \dfrac{5}{7}$ in nazadnje še $E(S) = E(X)+E(Y) = \dfrac{10}{7}$.

Tretji način. Pišemo $S = X_1 + X_2 + X_3 + Y_1 + Y_2 + Y_3$, kjer je:

$$X_i = \begin{cases} 1 & ; i\text{-ta vrstica je prazna} \\ 0 & ; i\text{-ta vrstica ni prazna} \end{cases}, \qquad Y_j = \begin{cases} 1 & ; j\text{-ta vrstica je prazna} \\ 0 & ; j\text{-ta vrstica ni prazna} \end{cases}.$$

Velja $E(X_i) = P(i\text{-ta vrstica je prazna}) = \dfrac{\binom{6}{3}}{\binom{9}{3}} = \dfrac{20}{84} = \dfrac{5}{21}$ in podobno tudi $E(Y_j) = \dfrac{5}{21}$. Sledi $E(S) = 6 \cdot \dfrac{5}{21} = \dfrac{10}{7}$.

4. Najprej izračunamo gostoto: $f_X(x) = F_X'(x) = e^{-e^{-x}}\, e^{-x}$. Sledi:

$$E\big(e^{X/2}\big) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{e^{-x}}\, e^{-x/2}\,\mathrm{d}x\,.$$

S substitucijo $t = e^{-x/2}$ dobimo:

$$E\big(e^{X/2}\big) = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad (*)$$

Od tod naprej gre na vsaj dva načina.

Prvi način: zaradi sodosti lahko $(*)$ pišemo tudi v obliki:

$$E\big(e^{X/2}\big) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

in s pomočjo gostote normalne porazdelitve $\mathrm{N}(0, \sigma)$:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/(2\sigma^2)}$$

za $\sigma = 1/\sqrt{2}$ dobimo:

$$E\big(e^{X/2}\big) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\,.$$

Drugi način: z nadaljnjo substitucijo $s = t^2$ dobimo:

$$E\big(e^{X/2}\big) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}}\, \mathrm{d}s = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,.$$