3. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – UNI-BOL
22. april 2010

1. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \dots X_{400}$ so neodvisne in porazdeljene diskretno po shemi:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0{\cdot}2 & 0{\cdot}7 & 0{\cdot}1 \end{pmatrix}.$$
Približno izračunajte $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{400} < 780)$.

2. Statistična spremenljivka ima porazdelitev Gama$(2a, a)$, kjer je $a > 0$ neznan parameter. Z drugimi besedami, porazdeljena je zvezno z gostoto:
$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{a^{2a}}{\Gamma(2a)}\, x^{2a-1}\, e^{-ax} & ;\ x > 0 \\ 0 & ;\ \text{sicer} \end{cases}.$$
Opazimo vzorec $X_1, X_2, \dots X_n$, kjer so te slučajne spremenljivke neodvisne in imajo to porazdelitev. Poiščite minimalno zadostno statistiko.

3. Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, \dots X_n$ so neodvisne in porazdeljene normalno $\mathrm{N}(\mu, \sigma)$. Definirajmo:
$$\bar{X} := \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\,,\ U := \frac{(X_1 - \bar{X})(X_2 - \bar{X}) \cdots (X_n - \bar{X})}{\left[(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (X_n - \bar{X})^2\right]^{n/2}}\,.$$
   a) Pokažite, da je U postranska statistika v modelu, kjer sta μ in σ oba neznana.
   b) Pokažite, da je U neodvisna od $X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$.

4. Statistična spremenljivka X je porazdeljena po Poissonu $\mathrm{P}(\lambda)$. Želeli bi oceniti λ^2, na voljo pa imamo eno samo opažanje (X).
   a) Poiščite cenilko po metodi največjega verjetja. Je le-ta nepristranska?
   b) Poiščite nepristransko cenilko z enakomerno najmanjšo disperzijo.
   c) Recimo, da nastavimo cenilko v obliki $X^2 - aX$. Katere izbire konstante a so smiselne z ozirom na srednjo kvadratično napako (q)?

   Pomoč: prvi štirje momenti Poissonove porazdelitve so:
$$E(X) = \lambda\,,\ E(X^2) = \lambda^2 + \lambda\,,\ E(X^3) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda\,,\ E(X^4) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda\,.$$