

### 3. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika  
4. april 2011

1. Slučajna spremenljivka  $X$  je porazdeljena zvezno z gostoto:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & ; 0 < x \leq 1 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases},$$

pogojna porazdelitev slučajne spremenljivke  $Y$  glede na  $X = x$  pa je normalna  $N(0, 1/\sqrt{x})$ . Določite brezpogojno porazdelitev slučajne spremenljivke  $Y$ .

2. Slučajne spremenljivke  $X_1, X_2, \dots, X_{100}$  so neodvisne in porazdeljene geometrijsko  $\text{Geom}(1/2)$ . Naj bo  $S$  njihova vsota.

- Izračunajte njeno momentno-rodovno funkcijo, t. j.  $E[e^{tS}]$ . Kje je definirana?
- S pomočjo neenačbe Markova in momentno-rodovne funkcije ocenite  $P(S \geq 300)$  (poiščite najboljšo možno oceno navzgor).

3. Naj bodo  $X_1, X_2, \dots$  slučajne spremenljivke, ki v porazdelitvi konvergirajo proti  $X$ ,  $Y_1, Y_2, \dots$  pa slučajne spremenljivke, ki v porazdelitvi konvergirajo proti konstanti  $c$ . Dokažite, da produkti  $X_1Y_1, X_2Y_2, \dots$  v porazdelitvi konvergirajo proti  $cX$ :

- v primeru, ko je  $X_1, X_2, \dots, X, Y_1, Y_2, \dots, c > 0$  (namig: logaritmirajte, pri čemer lahko privzamete, da komponiranje z zvezno funkcijo ohranja konvergenco v porazdelitvi);
- v primeru, ko je še vedno  $Y_1, Y_2, \dots, c > 0$ , slučajne spremenljivke  $X_n$  pa so navzgor ali navzdol omejene z neko konstanto  $M$  (neodvisno od  $n$ ).

4. Populacija je razdeljena na dve enako veliki skupini. Statistična spremenljivka ima na prvi skupini povprečje  $\mu_1$  in standardni odklon  $\sigma$ , na drugi skupini pa povprečje  $\mu_2$  in prav tako standardni odklon  $\sigma$ .

Iz populacije nameravamo vzeti stratificirani vzorec, in sicer  $n$  enot iz prve skupine in  $n$  enot iz druge skupine, pri čemer bi iz vsake skupine vzeli enostavni slučajni vzorec. Vendar pa se pri vsaki enoti z verjetnostjo  $p$  zmotimo in vzamemo enoto iz napačne skupine. Privzamemo, da so vsi postopki izbire za posamezne enote vzorca neodvisni (populacija je tako velika, da vzorec zajema le njen majhen delež).

Povprečje dane statistične spremenljivke na populaciji ocenimo s povprečjem te spremenljivke na tako dobljenem vzorcu. Izračunajte disperzijo te cenilke!