Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 12. 4. 2012

Matematika – univerzitetni študij

1. Ker mora biti vsota vseh verjetnosti enaka 1, velja $p = 1/12$. Nadalje je:

$$E(X) = \frac{2}{3}\,, \quad E(Y) = \frac{1}{3} + \frac{a}{12}\,, \quad E(XY) = \frac{1}{12} + \frac{a}{12}\,.$$

Slučajni spremenljivki X in Y sta torej nekorelirani natanko tedaj, ko velja $\frac{1}{12} + \frac{a}{12} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{a}{12}\right)$, torej $a = 5$.

2. a) *Prvi način.* Iz rodovne funkcije binomske porazdelitve dobimo pogojno rodovno funkcijo slučajne spremenljivke S:

$$G_{S|N}(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^{2N}\,,$$

brezpogojna rodovna funkcija pa je njeno matematično upanje:

$$G_S(z) = E\big[G_{S|N}(z)\big] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n\, e^{-\lambda}}{n!} \left(\frac{1+z}{2}\right)^{2n} = \exp\left[\left(\frac{z+1}{2}\right)^2 - \lambda\right] =$$
$$= e^{\lambda(z^2+2z-3)/4}\,.$$

Drugi način. Uporabimo, da je binomska porazdelitev $\mathrm{b}(2n, 1/2)$ dobljena kot porazdelitev vsote $X_1+X_2+\cdots+X_n$, kjer so $X_1, \ldots X_n$ neodvisne in porazdeljene binomsko $\mathrm{b}(2, 1/2)$. Rodovna funkcija te porazdelitve je $G_X(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^2$. Ker se porazdelitev slučajne spremenljivke S ujema s porazdelitvijo slučajne vsote $X_1+X_2+\cdots+X_N$, mora biti njena rodovna funkcija enaka $G_S(z) = G_N(G_X(z))$. Iz $G_N(z) = e^{\lambda(z-1)}$ dobimo:

$$G_S(z) = \exp\left[\lambda\left(\left(\frac{z+1}{2}\right)^2 - 1\right)\right]\,,$$

kar je isto kot prej.

b) *Prvi način.* Z odvajanjem rodovne funkcije dobimo:

$$G_S'(z) = \frac{\lambda(z+1)}{2}\, e^{\lambda(\lambda^2+2z-3)/4}\,,$$

torej je $P(S=1) = \frac{G'(0)}{1!} = \frac{\lambda}{2}\, e^{-3\lambda/4}$.

Drugi način. Iz razvoja rodovne funkcije v eksponentno vrsto dobimo:

$$G_S(z) = e^{-3\lambda/4}\, e^{\lambda(z^2+2z)/4} = e^{-3\lambda/4}\left(1 + \lambda\,\frac{z^2+2z}{4} + \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{z^2+2z}{4}\right)^2 + \cdots\right)\,,$$

od koder sledi $P(S=1)=\dfrac{\lambda}{2}\,e^{-3\lambda/4}$.

Tretji način. Ker pogojno glede na N velja $S\sim \mathrm{b}(2N,1/2)$, je tudi:

$$P(S=1\mid N)=\binom{2N}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-1}=\frac{N}{2^{2N-1}}$$

in posledično:

$$P(S=1)=E\left[\frac{N}{2^{2N-1}}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{2n-1}}\,\frac{\lambda^n\,e^{-\lambda}}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^{m+1}\,e^{-\lambda}}{2^{2m+1}\,m!}=\frac{\lambda}{2}\,e^{-3\lambda/4}\,.$$

3. Velja $E(X_i)=0$ in $D(X_i)=1/6$, torej $E(S)=0$ in $D(S)=25$. Sledi:

$$P(S\geq x)\approx\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{x}{5}\right)\,,$$

torej mora biti $x\approx 5\Phi^{-1}(0{\cdot}45)\doteq 8{\cdot}22427$.

Točen rezultat: $0{\cdot}224672$.

4. a) Če z m označimo mediano, mora veljati:

$$\int_0^m 2u\,\mathrm{d}u=u^2=\frac{1}{2}\,,$$

torej je $m=\sqrt{2}/2$.

b) *Prvi način.* Za $0\leq x\leq 1$ velja:

$$\begin{aligned}F_{U_{(1)}}(x)&=P(U_1\leq x \text{ ali } U_2\leq x)=P(U_1\leq x)+P(U_2\leq x)-P(U_1\leq x,U_2\leq x)=\\&=2x^2-x^4\\f_{U_{(1)}}(x)&=4x-4x^3\,,\end{aligned}$$

torej je $E\big(U_{(1)}\big)=\displaystyle\int_0^1(4x^2-4x^4)\,\mathrm{d}x=\frac{8}{15}$. Nadalje za $0\leq x\leq 1$ velja:

$$\begin{aligned}F_{U_{(2)}}(x)&=P(U_1\leq x,U_2\leq x)=P(U_1\leq x,U_2\leq x)=x^4\\f_{U_{(2)}}(x)&=4x^3\,,\end{aligned}$$

torej je $E\big(U_{(2)}\big)=\displaystyle\int_0^1 4x^4\,\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$.

Drugi način. Velja:

$$\begin{aligned}E(U_{(1)})&=4\iint_{[0,1]^2}\min\{x,y\}\,xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\\&=4\int_0^1\int_0^x xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x+4\int_0^1\int_x^1 x^2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\\&=\frac{4}{3}\int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x+2\int_0^1 x^2(1-x^2)\,\mathrm{d}x=\\&=\frac{8}{15}\end{aligned}$$

in:

$$
\begin{aligned}
E(U_{(2)}) &= 4 \iint_{[0,1]^2} \max\{x,y\}\, xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^x x^2 y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + 4 \int_0^1 \int_x^1 xy^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \\
&= 2 \int_0^1 x^4 \,\mathrm{d}x + \frac{4}{3} \int_0^1 x(1-x^3)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{4}{5}\,.
\end{aligned}
$$

c) Cenilko za mediano slučajne spremenljivke X, ki je enaka $a\,\dfrac{\sqrt{2}}{2} + b$, nastavimo v obliki $\lambda X_{(1)} + \mu X_{(2)}$. Njeno matematično upanje je enako $\lambda \left(\dfrac{8}{15}a + b\right) + \mu \left(\dfrac{4}{5}a + b\right)$. Cenilka bo nepristranska natanko tedaj, ko se bo to dvoje ujemalo pri vseh a in b, to pa bo tedaj, ko bo:

$$
\begin{aligned}
\frac{8}{15}\,\lambda + \frac{4}{5}\,\mu &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \\
\lambda + \mu &= 1\,.
\end{aligned}
$$

torej ko bo $\lambda = 3 - \dfrac{15\sqrt{2}}{8}$ in $\mu = \dfrac{15\sqrt{2}}{8} - 2$.