

3. kolokvij iz verjetnosti in statistike

Matematika – univerzitetni študij

4. april 2013

1. Izračunajte pričakovani kot, pod katerim meteorit pade na planet. Privzemite, da ima planet obliko krogle, da so vse smeri v vesolju, iz katerih prileti meteorit, enako zastopane, pri posamezni smeri pa privzemite tudi enakomerno porazdelitev trajektorij (premic), ki sekajo planet. Prav tako zanemarite ukrivljenje trajektorij zaradi gravitacije.
2. Slučajni vektor (X, Y) ima kovariančno matriko $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$. Določite, pri katerih vrednostih parametra a je korelacijski koeficient med slučajnima spremenljivkama X in $X + aY$ enak $1/6$.
3. Slučajna spremenljivka X je porazdeljena eksponentno $\text{Exp}(\lambda)$, t. j. zvezno z gostoto:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x > 0 \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases} .$$

Nadalje ima pogojno na X slučajna spremenljivka Y Poissonovo porazdelitev $P(X)$. Določite brezpogojno porazdelitev slučajne spremenljivke Y .

4. Naj bodo A_1, A_2, \dots neodvisni dogodki, za katere vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ divergira.
 - a) Dokažite, da se skoraj gotovo zgodi vsaj eden izmed teh dogodkov.
Namig: za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja $1 + x \leq e^x$.
 - b) Dokažite, da se skoraj gotovo zgodi neskončno mnogo teh dogodkov.

Drugemu rezultatu pravimo *druga Borel–Cantellijeva lema*.

- 4P. Določite vse kvartile Poissonove porazdelitve $P(5)$.