Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 4. 4. 2013

Matematika – univerzitetni študij

1. Zaradi enakomerne porazdelitve smeri lahko vesoljsko smer, iz katere pade meteorit, fiksiramo. Ravne trajektorije, ki sekajo planet, ustrezajo točkam na krogu. Za enoto lahko brez škode za splošnost vzamemo kar polmer planeta. Če trajektorija ustreza točki (X, Y) iz enotskega kroga, meteorit pade pod kotom $\arccos R$, kjer je $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Od tod naprej gre na vsaj dva načina.

Prvi način. Pričakovani kot je enak:

$$\bar{\alpha} := E\left[\arccos \sqrt{X^2 + Y^2}\right],$$

kjer je točka (X, Y) porazdeljena enakomerno po enotskem krogu. Sledi:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_{x^2+y^2 \le 1} \arccos \sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, .$$

Prevedba na polarne koordinate nam da:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \arccos r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = 2 \int_0^1 r \arccos r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \, .$$

S substitucijo $r = \cos t$ dobimo:

$$\bar{\alpha} = 2 \int_0^{\pi/2} t \cos t \sin t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} t \sin(2t) \, \mathrm{d}t = -\left. \frac{t \cos(2t)}{2} \right|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(2t) \, \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{\pi}{4} \, .$$

Drugi način. Označimo z α kot, pod katerim meteorit pade na planet. To je zdaj slučajna spremenljivka. Izračunamo najprej njeno kumulativno porazdelitveno funkcijo. Za $0 < t < \pi/2$ velja:

$$F_\alpha(t) = P(\alpha \le t) = P(\arccos R \le t) = P(R \ge \cos t) = 1 - \cos^2 t \, .$$

Od tod dobimo porazdelitveno gostoto:

$$f_\alpha(t) = 2 \cos t \sin t \, ,$$

iz nje pa pričakovano vrednost:

$$E(\alpha) = 2 \int_0^{\pi/2} t \cos t \sin t \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} \, .$$

Opomba. Porazdelitev smeri, iz katere pade meteorit, je enakomerna *le za cel planet*, ni pa enakomerna za posamezno točko, na katero pade meteorit. Če si namreč zamislimo neko majhno površino okrog izbrane točke, vsaki smeri ustreza prizma žarkov, ki ponazarjajo trajektorije meteoritov, ki padejo iz izbrane smeri na to površino. Toda smeri, ki je pravokotna na površino, ustreza prizma z večjim presekom kot pa smeri, ki je na površino poševna. Zato bi, če bi gledali porazdelitev smeri za posamezno točko, bolj poševne smeri (t. j. tiste, ki ustrezajo manjšim kotom) imele manjšo gostoto verjetnosti.

Opomba. Pričakovana vrednost, ki smo jo dobili, se ujema s pričakovano vrednostjo kota, ki bi bil porazdeljen enakomerno na intervalu od 0 do $\pi/2$. Vendar pa kot, pod katerim pade meteorit, ni porazdeljen enakomerno (glej drugi način).

2. Velja:

$$r(X, X + aY) = \frac{4 - a}{2\sqrt{4 - 2a + 9a^2}}\,,$$

torej mora biti:

$$a \le 4\,, \qquad \frac{(4 - a)^2}{4(4 - 2a + 9a^2)} = \frac{1}{36}\,,$$

od koder dobimo $a = 2$.

3. Iz:

$$P(Y = k \mid X) = \frac{X^k\, e^{-X}}{k!}\,; \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

dobimo:

$$P(Y = k) = E\left[\frac{X^k\, e^{-X}}{k!}\right] = \frac{\lambda}{k!}\int_0^\infty x^k\, e^x\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^{k+1}}\,.$$

Od tod dobimo:

$$P(Y + 1 = l) = \frac{\lambda}{(\lambda + 1)^l} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + 1}\right)^{l-1}\,,$$

torej ima $Y + 1$ geometrijsko porazdelitev $\mathrm{Geom}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)$.

4. a) Označimo $p_k = P(A_k)$ in naj bo B_n dogodek, da se zgodi vsaj eden izmed dogodkov $A_1, \ldots A_n$. Tedaj velja:

$$P(B_n) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_n) \ge 1 - e^{-(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)}\,.$$

Dogodki $B_1, B_2, B_3, \ldots$ tvorijo naraščajoče zaporedje, čigar unija je dogodek, da se zgodi vsaj eden izmed dogodkov dogodkov $A_1, A_2, A_3, \ldots$; verjetnost tega dogodka je $\lim_{n\to\infty} P(B_n)$. Ker vrsta $\sum_{i=1}^\infty p_i$ divergira, je ta limita večja ali enaka 1, torej je enaka ena.

b) Videli smo, da se skoraj gotovo zgodi vsaj eden izmed dogodkov $A_1, A_2, \ldots$. Naj bo I_1 prvi indeks i, za katerega se zgodi A_i. Pogojno na I_1 so dogodki A_{I_1+1}, A_{I_1+2} spet neodvisni z verjetnostmi $p_{I_1+1}, p_{I_2+1}, \ldots$. Ker vsota teh verjetnosti spet divergira, se skoraj gotovo zgodi vsaj eden izmed teh dogodkov. Torej se skoraj gotovo zgodita vsaj dva izmed dogodkov $A_1, A_2, \ldots$. Isti sklep lahko naredimo tudi na I_2, drugem indeksu, za katerega se zgodi A_i. Tako dobimo, da se skoraj gotovo zgodijo vsaj trije dogodki. Ko nadaljujemo, dobimo, da se za vsak m skoraj gotovo zgodi vsaj m teh dogodkov. Od tod pa sledi, da se skoraj gotovo zgodi neskončno mnogo teh dogodkov.

4P. Iz tabele verjetnosti:

k	$P(X = k)$	$P(X < k)$	$P(X \leq k)$
0	0˙00673	0	0˙00673
1	0˙03369	0˙00673	0˙04043
2	0˙08422	0˙04043	0˙12465
3	0˙14037	0˙12465	0˙26503
4	0˙17547	0˙26503	0˙44049
5	0˙17547	0˙44049	0˙61596
6	0˙14622	0˙61596	0˙76218

odčitamo $q_{1/4} = 3$, $q_{1/2} = 5$ in $q_{3/4} = 6$. Vsi trije kvartili so natančno določeni.