Rešitve kolokvija iz verjetnosti in statistike z dne 9. 6. 2011

Matematika – bolonjski univerzitetni študij in pedagoška matematika

1. Če taka cenilka obstaja, mora biti funkcija pripadajoče zadostne statistike. Za eno samo opažanje X je le-ta enaka kar X, za neodvisna opažanja $X_1, \ldots X_n$ pa je enaka $S := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Slučajna spremenljivka S ima porazdelitev Gama(n, λ). Izračunajmo:

$$E(S^2) = \int_0^\infty s^2 \frac{\lambda^n}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-\lambda s} \, \mathrm{d}s = \frac{n(n+1)}{\lambda^2} \, .$$

To lahko izračunamo tudi s pomočjo disperzije:

$$E(S^2) = D(S) + \big(E(S)\big)^2 = \frac{n}{\lambda^2} + \left(\frac{n}{\lambda}\right)^2 = \frac{n(n+1)}{\lambda^2} \, .$$

Nepristranska cenilka za $\dfrac{1}{\lambda^2}$ bo torej $\dfrac{S^2}{n(n+1)}$.

2. Naj bo A dogodek, da prvi poskus uspe, drugi ne uspe, tretji pa spet uspe. Tedaj je:

$$P_\theta(A) = \theta \left(1 - \frac{1+\theta}{2}\right) \frac{\theta}{2} = \frac{\theta^2(1-\theta)}{4} \, .$$

Iščemo maksimum tega izraza za $\theta \in [0, 1]$. Iz $P_0(A) = P_1(A) = 0$ in $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} P_\theta(A) = \frac{1}{4}(2\theta - 3\theta^2)$, kar je enako nič pri $\theta = 2/3$, dobimo, da je lahko maksimum dosežen kvečjemu v prej omenjenih točkah. Ker je edino $P_{2/3}(A) > 0$, se to zgodi pri $\theta = \hat{\theta} := 2/3$, kar je tudi ocena po metodi največjega verjetja.

3. $\bar{X} \doteq 1{\dot{}}55, \quad S \doteq 1{\dot{}}20, \quad c \doteq 1{\dot{}}96, \quad \Delta \doteq 0{\dot{}}21.$
Interval zaupanja: $1{\dot{}}34 < \mu < 1{\dot{}}76$.

4. Hipotezo bomo zavrnili, če bo premalo izvlečenih listkov dobitnih. Natančneje, če je D število dobitnih listkov med izvlečenimi, bomo za določen prag c ničelno hipotezo zavrnili, če bo $D < c$. Za $D > c$ hipoteze ne bomo zavrnili, za $D = c$ pa bomo *randomizirali*, t. j. hipotezo bomo zavrnili z neko verjetnostjo γ. Slučajna spremenljivka D je porazdeljena hipergeometrijsko, natančneje, velja:

$$P(D = k) = \frac{\binom{12}{k}\binom{8}{5-k}}{\binom{20}{5}} \, .$$

Izračunajmo:

$$P(D = 0) \doteq 0{\dot{}}0036 \, , \qquad P(D \le 0) \doteq 0{\dot{}}0036$$
$$P(D = 1) \doteq 0{\dot{}}0542 \, , \qquad P(D \le 1) \doteq 0{\dot{}}0578 \, .$$

Torej bomo postavili $c = 1$. Verjetnost γ bomo izračunali tako, da bo veljalo:

$$P(D = 0) + \gamma\, P(D = 1) = \alpha\,,$$

torej:

$$\gamma = \frac{\alpha - P(D = 0)}{P(D = 1)} \doteq 0{\cdot}85$$

(zaokrožili smo navzdol).