

Entropija, ponavljanje za kolokvij

1. Igramo pošteno ruleto, kjer stavimo ne eno od polj, oštevilčenih s števili med 0 in 36. Slučajna spremenljivka X zavzame vrednost 1, če smo igro dobili, in 0 sicer. Slučajna spremenljivka Y zavzame eno izmed vrednosti $\{0, 1, \dots, 36\}$ glede na to, katera številka je zadela. Izračunajte entropijo slučajnih spremenljivk X in Y .
2. Naj bosta X in Y neodvisni diskretni slučajni spremenljivki s končno zalogo vrednosti. Pokažite, da velja $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$.
3. Naj bosta X in Y diskretni slučajni spremenljivki s končno zalogo vrednosti. Pokažite, da velja $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$.

Nasvet: najprej dokažite *Gibbsovo neenakost*, ki pravi naslednje. Naj bosta (p_1, \dots, p_n) in (q_1, \dots, q_n) verjetnostni porazdelitvi. Potem velja

$$H(p_1, \dots, p_n) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \leq - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 q_i$$

4. Nasprotnik si izmisli število med 1 in 64, ki ga moramo uganiti; na vprašanja odgovarja samo z DA ali NE. Koliko najmanj vprašanj moramo postaviti, da zagotovo uganemo število? Nasvet: definirajte ustrezne diskretne slučajne spremenljivke in izračunajte njihovo entropijo.
5. Imamo 100 zlatnikov, eden je ponarejen (prelahek). Koliko najmanj tehtanj potrebujemo, da ga odkrijemo, če imamo na voljo ravnovesno tehtnico? Nasvet: definirajte ustrezne diskretne slučajne spremenljivke in izračunajte njihovo entropijo.
6. Imamo 12 zlatnikov, eden je ponarejen (prelahek ali pretežek). Koliko najmanj tehtanj potrebujemo, da ga odkrijemo, če imamo na voljo ravnovesno tehtnico?