1. izpit
UVOD V DIFERENCIALNO GEOMETRIJO

12. februar 2010

Vpisna številka: Ime in priimek:
Vrsta: Sedež:

Vse korake DOBRO utemelji!

1. Naj bo ploskev S parametrizirana s predpisom

$$\sigma(u, v) = u\gamma(v) + (1 - u)\delta(v), \quad u, v \in (-1, 1),$$

kjer sta γ in δ gladki poti. Dokaži, da je σ izometrija, če zadošča naslednjim pogojem:

(a) pot $\gamma(v)$ je parametrizirana z naravnim parametrom;

(b) $\gamma'(v) = \delta'(v), \forall v$;

(c) $||\gamma(0) - \delta(0)|| = 1$;

(d) $\langle \gamma'(0), \gamma(0) - \delta(0) \rangle = 0$;

(e) $\langle \gamma''(t), \gamma(t) - \delta(t) \rangle = 0, \forall t$.

Kako je potrebno spremeniti pogoja (a) in (c), da bi bila preslikava σ konformna a ne nujno izometrija?

2. Naj bo gladka pot $\gamma(t)$ parametrizirana z naravnim parametrom, naj bosta ukrivljenosti $\kappa(t)$ in $\tau(t)$ povsod neničleni in naj binormalni vektor poti $\gamma(t)$ oklepa konstantni kot s fiksnim vektorjem A. Dokaži, da je kvocient $\kappa(t)/\tau(t)$ konstanten in ga izračunaj. (Namig: pokaži, da je A pravokoten na normalni vektor krivulje γ.)

3. S pomočjo lokalnega Gauss-Bonnetovega izreka izračunaj ploščino pasu med vzporednikoma α in β na sferi s radijem 4. Pri tem naj vzporednik α leži $60°$ severno, vzporednik β pa $60°$ južno od ekvatorja.

4. Naj bosta $f(u)$ in $g(v)$ taki gladki funkciji, da je

$$\sigma(u, v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(v))$$

lokalna karta ploskve S, pri čemer je $f'(u) > 0$ povsod.

(a) Izračunaj Gaussovo in povprečno ukrivljenost ploskve S.

(b) Za primer $f(u) = au$ in $f(v) = gv$ (pri čemer sta a in b nenegativni konstanti) izračunaj glavni ukrivljenosti S v vsaki točki.

(c) Za primer $f(u) = u$ in $f(v) = v$ izračunaj glavna vektorja S v vsaki točki.