

Prvi izpit iz Uvoda v diferencialno geometrijo

13. februar 2013

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!

Ime in priimek

1	
2	
3	
4	
Σ	

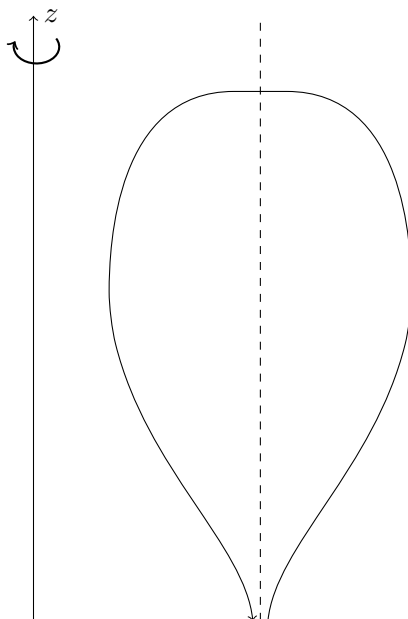
Sedež (2.02)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Naj bo S rotacijska ploskev, ki jo dobimo ob rotaciji spodnje krivulje okoli osi z , kot to kaže slika. Pomožna črtkasta črta označuje asimptoto. Nariši in kvalitativno opiši geodetke na ploskvi S .



2. naloga (25 točk)

Ploskev je podana s karto

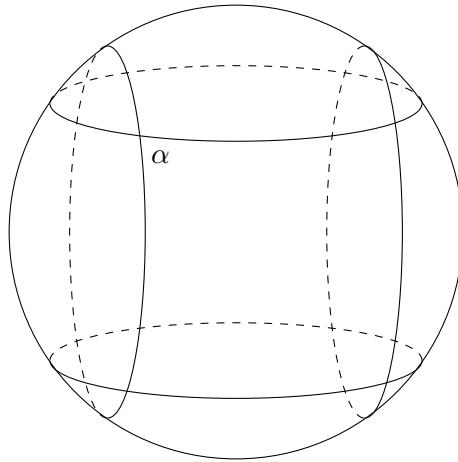
$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, b \cdot v), \quad v \in (0, 2\pi), \quad u \in (0, 2), \quad b > 0.$$

- (i) Izračunaj prvo in drugo fundamentalno formo ploskve.
- (ii) Ali je omenjena karta konformna?
- (iii) Izračunaj glavne vektorje, glavne ukrivljenosti, Gaussovo ukrivljenost ter povprečno ukrivljenost ploskve.
- (iv) Razvij vektor $w = (2\sigma_u - \sigma_v)_{u=1, v=\pi}$ v standardni bazi prostora \mathbb{R}^3 . Prav tako razvij vektor $dF(w)_{u=1, v=\pi}$, pri čemer je $F(x, y, z) = (x + y, z, -xz)$.

3. naloga (25 točk)

Podana je sfera polmera 1, na kateri ležijo štiri krožnice. Dve krožnici sta vzporednika na višini $\pm\pi/6$. Ostali dve krožnici dobimo iz prvih dveh krožnic, če sfero zarotiramo okoli osi y za $\pi/2$. Štiri krožnice tvorijo pravilni sferični štirikotnik z notranjim kotom α .

- (i) Parametriziraj krožnice.
- (ii) Pokaži, da se krožnice sekajo pod kotom $\alpha = \arccos(\sqrt{2}/3)$. (Namig: najprej izračunaj točko v kateri se sekajo.)
- (iii) Predpostavi, da je geodezična ukrivljenost krožnic konstantno enaka $\pm g$. Izračunaj ploščino pravilnega štirikotnika, ko ga določajo štiri krožnice.



4. naloga (25 točk)

Naj bo $\gamma(s)$ enotska pot v \mathbb{R}^3 s konstantno ukrivljenostjo κ , katere torzijska ukrivljenost τ je povsod enaka 0.

- (i) Dokaži, da je pot γ vsebovana v neki ravnini.
- (ii) Dokaži, da je središče pritisnjene krožnice na pot γ neodvisno od parametra s .
- (iii) Dokaži, da je γ vsebovana v krožnici.
- (iv) Dokaži, da parametrizacija

$$\beta(t) = (2 + \cos t + 2 \sin t, 1 + \cos t - 2 \sin t, 1 + \sqrt{6} \cos t)$$

podaja krožnico. Poišči njeno središče in polmer.