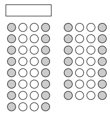
1	
2	
3	
4	
Σ	

Prvi izpit iz Uvoda v diferencialno geometrijo

30. januar 2012

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!



Sedež (2.02)

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (30 točk)

Naj bo $\sigma(u, v) = (e^u - 1, \ln v - e, (e^u - 1)\ln v), u \in \mathbb{R}, v > 0$.

(i) Dokaži, da σ globalno (ne le lokalno) določa neko ploskev S.

(ii) Izračunaj Gaussovo in povprečno ukrivljenost ploskve S.

(iii) Poišči glavni ukrivljenosti in glavna vektorja v točki $u = 0, v = 1$. Glavna vektorja zapiši v bazi tangentnega prostora in v standardni ortonormirani bazi prostora $\mathbb{R}^3$.

(iv) Z ustrezno substitucijo koordinat izračunaj površino ploskve na območju, kjer velja neenakost $(e^u - 1)^2 + (\ln v)^2 \leq 1$.

2. naloga (20 točk)

Naj bo A matrika dimenzij 3×3 in naj bo

$$\sigma(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

lokalna karta ploskve S.

(i) Naj bo matrika A ortogonalna (to pomeni, da je $AA^T = Id$, pri čemer velja $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle, \forall x, y$). Dokaži, da je preslikava $\sigma(u, v) \mapsto A\sigma(u, v)$ izometrija in da ohranja glavni ukrivljenosti ploskve S.

(ii) Naj bo $\sigma(u, v) \mapsto A\sigma(u, v)$ izometrija za neko matriko A dimenzij 3×3. Ali to pomeni, da je matrika A ortogonalna?

3. naloga (25 točk)

Podan je valj S, ki je parametriziran kot $\sigma(u, v) = (\cos u, \sin u, v), u \in [0, 2\pi], v \in \mathbb{R}$.

(i) Z uporabo geodetskih enačb poišči eksplicitne formule za geodetke (parametrizirane z naravnim parametrom) na valju S.

(ii) Poišči vse geodetke, ki gredo skozi točki $(1, 0, 0)$ in $(0, 1, \pi/2)$.

(iii) Izberi si poljubno geodetko γ iz prejšnje točke. Poišči geodetko, ki gre skozi točko $(1, 0, 0)$ in v tej točki oklepa kot $\pi/2$ z geodetko γ.

4. naloga (25 točk)

Naj bo $\gamma\colon (a, b) \to \mathbb{R}^2$ gladka ravninska krivulja s pozitivno, strogo naraščajočo ukrivljenostjo κ.

(i) Dokaži, da so pritisnjene krožnice na krivuljo γ vgnezdene, t.j. za $t < s$ velja, da je pritisnjena krožnica na krivuljo γ v pri parametru s vsebovana v krogu, ki ga določa pritisnjena krožnica na krivuljo γ v pri parametru t.

(ii) Dokaži, da ne morejo imeti vse pritisnjene krožnice skupnega središča.