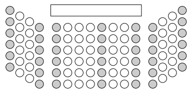
Prvi kolokvij iz Uvoda v diferencialno geometrijo

24. november 2011

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!



Sedež (2.01)

1	
2	
3	
Σ	

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (20 točk)

Uvedi strukturo mnogoterosti na ploskev, ki jo dobimo, ko graf funkcije $f\colon (0,\infty) \to (2,\infty)$ definirane kot $f(x) = x^2 + 2$ zavrtimo okoli simetrale lihih kvadrantov. Namig: vektor (x, x^2) izrazi kot linearno kombinacijo vektorjev $(1,1)$ in $(-1,1)$.

2. naloga (30 točk)

Naj bo $\sigma(u,v) = v(\cos u, \sin u, 1), v > 0, u \in \mathbb{R}$ gladka preslikava, katere slika je podmnožica $S \subset \mathbb{R}^3$.

(i) Preslikava σ ni injektivna, zaradi česar σ ni lokalna karta. Dokaži, da je S kljub temu gladka ploskev. Skiciraj ploskev S.

(ii) V vsaki točki ploskve S poišči tangentno ravnino.

(iii) Naj bo $\gamma(t) = \sigma(t\sqrt{2}, e^t), t > 0$ pot v S. V vsaki točki poti γ izrazi tangentni vektor $\dot\gamma$ v bazi $\{\sigma_u, \sigma_v\}$.

(iv) Dokaži, da za vsako vrednost parametra t vektor $\dot\gamma$ razpolavlja kot med σ_u in σ_v.

3. naloga (50 točk)

Naj bo $\gamma(s)$ gladka pot v $\mathbb{R}^3$, parametrizirana z naravnim parametrom in naj bo

$$\sigma(s,\varphi) = \gamma(s) + a(\mathbf{n}(s)\cos\varphi + \mathbf{b}(s)\sin\varphi),$$

pri čemer so $a > 0, s \in (0,l), \varphi \in (0, 2\pi)$ in je σ injektivna. Trojica $\big(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\big)$ predstavlja standardno ortonormirano bazo prirejeno krivulji γ v točki $\gamma(s)$.

(i) Dokaži, da σ predstavlja karto gladke ploskve $S \subset \mathbb{R}^3$, če za ukrivljenost κ krivulje γ velja $\kappa < 1/|a|$. Kaj predstavlja ploskev S geometrijsko?

(ii) Kdaj je preslikava σ lokalni izomorfizem? Kdaj je preslikava σ konformna?

(iii) Poišči površino ploskve S.

(iv) Pri pogoju $\tau = 0, \kappa = (2a)^{-1}$ izračunaj glavni ukrivljenosti ploskve S in pripadajoča glavna vektorja.