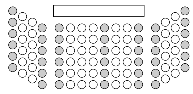
Drugi kolokvij iz Uvoda v diferencialno geometrijo

19. januar 2012

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 115 točk. Veliko uspeha!



Sedež (2.01)

1	
2	
3	
Σ	

Ime in priimek

Vpisna številka

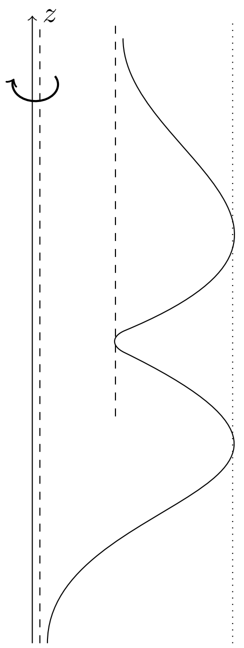
1. naloga (30 točk)

Naj bo S rotacijska ploskev, ki jo dobimo ob rotaciji spodnje krivulje okoli osi z, kot to kaže slika. Pomožne črte označujejo asimptoti in točke z isto oddaljenostjo od osi rotacije.

(i) Nariši in kvalitativno opiši geodetke na ploskvi S.

(ii) Ali obstajajo poleg poldnevnikov še kakšne geodetke, ki niso vsebovane v kompaktni podmnožici S?

(iii) Ali obstajajo poleg poldnevnikov še kakšne geodetke brez samopresečišč?



2. naloga (40 točk)

Podana je parametrizacija Catalanove ploskve C:

$$\sigma(u,v) = (u - \sin u \cosh v, 1 - \cos u \cosh v, -4 \sin \frac{u}{2} \sinh \frac{v}{2}), \quad u, v \neq 0.$$

Preslikava $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ v splošnem ni lokalna karta, ker ni injektivna. Lokalne karte dobimo z ustreznimi zožitvami preslikave σ na majhne odprte množice, česar ni potrebno preverjati.

(i) Dokaži, da so omenjene zožitve preslikave σ konformne preslikave.

(ii) Dokaži, da je C minimalna ploskev (z malo spretnosti se lahko izognemo eksplicitnemu računanju normale).

(iii) Dokaži, da lahko krivuljo $\sigma(0,v); v > 0$, lokalno reparametriziramo tako, da bo dobljena krivulja geodetka na C.

(iv) Naj bo s naravni parameter krivulje $\sigma(u(s), 0); u > 0$. Dokaži, da je $\sigma(u(s), 0)$ geodetka na C. Namig: iz pogoja o naravnosti parametra s izrazi $u'(s)$.

Formule:

$$\sinh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{2}, \cosh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x + 1}{2}, \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}, \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos x + 1}{2}$$

3. naloga (45 točk)

Na sferi S s polmerom 1 so podane tri krožnice: krožnici a in b imata polmer 1 in se sekata na ekvatorju pod kotom γ; krožnica c je vzporednik z ekvatorjem na višini $\pi/4$ (radianov) severno. Krožnici a in b sekata krožnico c pod kotom α in jo razdelita na štiri enake dele.

(i) Izračunaj geodetsko ukrivljenost krivulje c.

(ii) Na koliko delov razdelijo krožnice a, b in c sfero S? Izrazi površino vsakega izmed teh delov s parametroma α in γ.