UVOD V GEOMETRIJSKO TOPOLOGIJO: PISNI IZPIT
9. 7. 2012

1. naloga (20 točk)

a. Naj bosta M in ε pozitivni realni števili. Dokaži, da obstaja tak polinom p, za katerega je $p(0) = 0$ in za vsako število $x \in [-M, M]$ velja $\big|p(x) - |x|\big| < \varepsilon$.

b. Naj bo X kompakten Hausdorffov prostor in naj bo $\mathcal{A}$ podalgebra algebre vseh zveznih funkcij $C(X, \mathbb{R})$. (Ne privzamemo, da $\mathcal{A}$ vsebuje konstantne funkcije ali da loči točke.)
Dokaži, da za vsako funkcijo $f \in \mathcal{A}$ velja $|f| \in \bar{\mathcal{A}}$.

2. naloga (25 točk)

Podan je podprostor X evklidskega prostora $\mathbb{R}^3$:

$$X = [0,\infty) \times [0,1] \times \{0,1\} \cup [0,\infty) \times \{1\} \times [0,1] \cup [\tfrac{1}{2}, 1] \times \{0\} \times [0,1]$$

a. Ali je X mnogoterost?

b. Ali je X retrakt prostora $\mathbb{R}^3$?

c. Na X podamo ekvivalenčno relacijo:

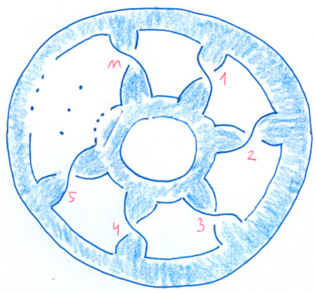
$$(x,y,z) \sim (u,v,w) \iff (x,y,z) = (u,v,w) \text{ ali } (y = v = 0 \text{ in } x = u).$$

Poišči primeren podprostor Y kakega evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, ki je homeomorfen kvocientnemu prostoru $X/\!\sim$.

Rešitve oziroma odgovore ustrezno utemelji.

3. naloga (15 točk)

Klasificiraj ploskev (n je naravno število):



Teoretična naloga (10 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna (**P**) oziroma napačna (**N**).
Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- [ ] Naj bo X topološki prostor. Kompaktno odprta topologija na $C(X, \mathbb{R})$ se ujema s topologijo konvergence po točkah.
- [ ] Za vsako zvezno funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ obstaja tak polinom p, da za vsako število $x \in [-17, 156221]$ velja $|f(x) - p(x)| \leqslant \pi^2/6$.
- [ ] Kvocientni prostor nepovezanega prostora je nepovezan.
- [ ] Suspenzija n-razsežne sfere je homeomorfna $(n+1)$-razsežni sferi.
- [ ] Vsaka zaprta vložitev $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je homeomorfizem.
- [ ] Ne obstaja retrakcija $\mathbb{R}^2 \to B^2$.
- [ ] Vsak retrakt diska B^2 je povezan prostor.
- [ ] Vsak povezan podprostor realne premice $\mathbb{R}$ je mnogoterost.
- [ ] Projektivni prostor $\mathbb{R}P^n$ je Hausdorffov natanko tedaj, ko je n sodo število.
- [ ] Homeomorfnostni razred sklenjene orientabilne ploskve je natanko določen z Eulerjevo karakteristiko.