UVOD V GEOMETRIJSKO TOPOLOGIJO: 1. TEST
5. 4. 2013

1. NALOGA (5 točk)

Naj bo $J \subset \mathbb{R}$ interval in $x_0 \in J$. Za zvezno funkcijo $f\colon J \to \mathbb{R}$ naj bo $F\colon J \to \mathbb{R}$ funkcija, definirana s predpisom

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Iz lastnosti integrala sledi, da je F zvezna funkcija, torej je s predpisom $\Phi(f) = F$ podana preslikava $\Phi\colon C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$.

a. Naj bo $J = [a,b]$ in naj bo prostor $C([a,b],\mathbb{R})$ opremljen z metriko enakomerne konvergence. Dokaži, da je Φ zvezna preslikava.

b. Naj bo $J = \mathbb{R}$ in naj bo prostor $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ opremljen s topologijo enakomerne konvergence na kompaktih. Dokaži, da je Φ zvezna preslikava.

2. NALOGA (5 točk)

a. Naj L označuje zaprto kroglo polmera r s središčem v a in naj bo $R > r$. Dokaži, da obstaja zvezna surjekcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ z naslednjimi lastnostmi:
- $f(x) = x$ za $\|x - a\| \geqslant R$,
- $f(x) = a$ za $x \in L$,
- $f|_{\mathbb{R}^2 - L}$ je injekcija.

b. Naj bodo $L_1, L_2, \ldots, L_m$ paroma disjunktne zaprte krogle.
Poišči primeren podprostor kakega evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, ki je homeomorfen kvocientnemu prostoru $\mathbb{R}^2/\{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$.

c. (*) Naj bo $\{L_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ lokalno končna družina paroma disjunktnih zaprtih krogel v $\mathbb{R}^2$.
Poišči primeren podprostor kakega evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, ki je homeomorfen kvocientnemu prostoru $\mathbb{R}^2/\{L_1, L_2, \ldots\}$.

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

TEORETIČNA NALOGA (5 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna (**P**) oziroma napačna (**N**). Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

☐ Naj bo $U(f,K,\varepsilon)$ neka bazna odprta okolica prostora zveznih preslikav $C(X,Y)$, kjer je Y metrični prostor. Če je $g \in U(f,K,\varepsilon)$, obstaja taka bazna okolica $U(g,L,\delta)$, za katero je $U(g,L,\delta) \subset U(f,K,\varepsilon)$.

☐ Kvocientni prostor $\mathbb{R}/[0,\infty)$ je homeomorfen premici $\mathbb{R}$ (z običajno topologijo).

☐ Topologija enakomerne konvergence na kompaktih in kompaktno odprta topologija na $C(X,Y)$ se ujemata, če je Y metrični prostor.

☐ Naj bo $\sim$ ekvivalenčna relacija na prostoru X. Kvocientni prostor $X/{\sim}$ je T_1 natanko tedaj, ko so ekvivalenčni razredi zaprti v X.

☐ Kvocientni prostor 1-števnega prostora je 1-števen prostor.

☐ Če je X kompakten prostor, sta kompaktna tudi stožec CX in suspenzija ΣX.

☐ Naj topološka grupa G deluje na prostoru X. Kvocientna projekcija $X \to X/G$ je vedno zaprta.

☐ Vsaka odprta ali zaprta zvezna surjekcija je kvocientna preslikava.

☐ Kvocientni prostor nepovezanega prostora je lahko povezan prostor.

☐ Naj bo $q\colon X \to Y$ kvocientna preslikava. Množica $A \subset X$ je nasičena glede na q, če A seka vsako vlakno preslikave q.