UVOD V GEOMETRIJSKO TOPOLOGIJO: 1. TEST
30. 3. 2012

1. naloga (5 točk)

a. Naj bo X metrični prostor in naj bo K kompaktna podmnožica v X. Dokaži, da je preslikava $C(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, ki vsaki funkciji f priredi $\max_K f = \max\big(f(K)\big)$, zvezna. Prostor $C(X,\mathbb{R})$ je opremljen s topologijo enakomerne konvergence na kompaktih.

b. Naj bosta X in Y topološka prostora in naj bo $\varphi\colon Y \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Dokaži, da je preslikava $\varphi_*\colon C(X,Y) \to C(X,\mathbb{R})$, definirana s predpisom $\varphi_*(f) = \varphi \circ f$, zvezna. Prostora $C(X,Y)$ in $C(X,\mathbb{R})$ sta opremljena s kompaktno odprto topologijo.

c. Privzemi, da ima topološki prostor Y tole lastnost: za vsako kompaktno množico L in vsako odprto okolico V množice L obstaja taka zvezna funkcija $\varphi\colon Y \to [0,1]$, za katero je $\varphi|_L \equiv 0$ in $\varphi|_{Y-V} \equiv 1$. Dokaži, da za vsako „točko“ $f \in C(X,Y)$ in za vsako odprto okolico U za f obstaja taka zvezna funkcija $\Phi\colon C(X,Y) \to [0,1]$ za katero je $\Phi(f) = 0$ in $\Phi|_{C(X,Y)-U} \equiv 1$.

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

2. naloga (5 točk)

a. Naj bo topološki prostor X unija zaprtih podprostorov A in B z nepraznim presekom.
Dokaži, da inkluzija $B \hookrightarrow A \cup B$ inducira homeomorfizem $B/A\cap B \to A\cup B/A$.

b. Poišči primeren podprostor kakega evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, ki je homeomorfen kvocientu S^2/S^2_-, kjer je S^2 enotska sfera v $\mathbb{R}^3$ in $S^2_- = S^2 \cap \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0]$.

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

Teoretična naloga (5 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna (**P**) oziroma napačna (**N**).
Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Podbazna množica $G(K,V)$ $(= \langle K,V\rangle)$ vsebuje natanko tiste funkcije $f\colon X \to Y$, za katere velja $f(x) \in V \iff x \in K$.
- ☐ Kvocientni prostor $[0,1]/\{0,1\}$ je homeomorfen premici $\mathbb{R}$ (z običajno topologijo).
- ☐ Topologija enakomerne konvergence na kompaktih in kompaktno odprta topologija na $C(X,Y)$ se ujemata, če je Y metrični prostor.
- ☐ Prostor $C(X,\mathbb{R})$ s topologijo enakomerne konvergence na kompaktih je topološka algebra, če je X metrični prostor.
- ☐ Vsaka podalgebra $\mathcal{A} \subset C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ki vsebuje vse konstantne funkcije, loči točke na $\mathbb{R}$.
- ☐ Za vsako zvezno funkcijo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ obstaja tak polinom $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da za $|x-1| \leqslant \sqrt{3}$ velja $|f(x) - p(x)| < 0{,}0001$.
- ☐ Naj bo $f\colon X \to Y$ zvezna preslikava iz kompaktnega v Hausdorffov prostor. Tedaj je Y homeomorfen kvocientnemu prostoru prostora X po primerni relaciji.
- ☐ Vsaka kvocientna projekcija je odprta ali pa zaprta preslikava.
- ☐ Kvocientni prostor povezanega prostora je povezan prostor.
- ☐ Naj bo $q\colon X \to X/{\sim}$ kvocientna projekcija. Vsaka zvezna preslikava $f\colon X \to Y$ inducira neko zvezno preslikavo $\bar{f}\colon X/{\sim} \to Y$, za katero velja $\bar{f} \circ q = f$, vendar $\bar{f}$ v splošnem ni enolično določena.