UVOD V GEOMETRIJSKO TOPOLOGIJO: 1. TEST
28. 3. 2014

1. naloga (5 točk)

a. Naj bo $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in naj bo $\varepsilon > 0$. Dokaži, da obstaja tak polinom p, za katerega je $f(0) = p(0)$ in $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ za vsa števila $x \in [0,1]$.

b. $(*)$ Naj bo $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in naj bo $\varepsilon > 0$. Dokaži, da obstaja tak polinom p, za katerega je $f(0) = p(0)$ in $f(1) = p(1)$ in $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ za vsa števila $x \in [0,1]$.

c. Naj bo U odprta množica v $\mathbb{R}^n$. Dokaži, da je U povezana s potmi natanko tedaj, ko je povezana s *polinomskimi* potmi: pot $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\colon [0,1] \to U$ je polinomska, če so vse komponente γ_i polinomi.

Komentar: Naloga **b.** je za bonus in se je loti na koncu. V vsakem primeru vsebino lahko uporabiš pri **c.**

Namig: Morda si pri **c.** lahko pomagaš z različnimi karakterizacijami kompaktno odprte topologije.

2. naloga (5 točk)

Na ravnini $\mathbb{R}^2$ je podana naslednja ekvivalenčna relacija:

$$(\star) \qquad (x,y) \sim (u,v) \iff x = u.$$

a. Naj bo $X = \big((-\infty,0]\times(-\infty,0]\big) \cup \big([0,\infty)\times[0,\infty)\big)$. Poišči primeren podprostor kakega evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, ki je homeomorfen kvocientnemu prostoru prostora X po zožitvi relacije $(\star)$.

b. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in

$$(\star\star) \qquad X_f = \{(x,y) \,|\, x \leqslant 0 \text{ in } y \leqslant f(x)\} \cup \{(x,y) \,|\, x \geqslant 0 \text{ in } y \geqslant f(x)\}\,.$$

Poišči primeren podprostor kakega evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, ki je homeomorfen kvocientnemu prostoru prostora X_f po zožitvi relacije $(\star)$.

c. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ omejena funkcija, ki je zvezna v 0. Poišči primeren podprostor kakega evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, ki je homeomorfen kvocientnemu prostoru prostora X_f iz definicije $(\star\star)$ po zožitvi relacije $(\star)$.

Rešitve oziroma odgovore utemelji. Možne so različne utemeljitve.

Teoretična naloga (5 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna (**P**) oziroma napačna (**N**). Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in $\varepsilon > 0$. Tedaj obstaja tak polinom p, da velja $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ za vsa realna števila x.
- ☐ Množice $G(K,V) = \{f \in C(X,Y) \,|\, f(K) \subset V\}$, kjer je K kompaktna podmnožica v X in V odprta podmnožica v Y, tvorijo bazo kompaktno odprte topologije na $C(X,Y)$.
- ☐ Če je X kompakten topološki prostor, Y pa metrični prostor, je prostor zveznih preslikav $C(X,Y)$ s kompaktno odprto topologijo metrizabilen.
- ☐ Kvocientni prostor $[-5,5]/[-1,1]$ je homeomorfen intervalu $[-1,1]$.
- ☐ Naj bo $\sim$ ekvivalenčna relacija na prostoru X. Kvocientni prostor $X/\!\sim$ je T_1 natanko tedaj, ko so ekvivalenčni razredi zaprti v X.
- ☐ Vsaka zvezna surjekcija iz kompaktnega v metrični prostor je kvocientna.
- ☐ Kvocientni prostor nepovezanega prostora je nepovezan.
- ☐ Naj topološka grupa G deluje na prostoru X. Kvocientna projekcija $X \to X/G$ je vedno zaprta.
- ☐ Kvocientni prostor separabilnega prostora je separabilen.
- ☐ Naj bo $f\colon X \to Y$ kvocientna preslikava. Na X vpeljemo relacijo: $x \sim x' \iff f(x) = f(x')$. Tedaj je kvocientni prostor $X/\!\sim$ homeomorfen prostoru Y.