UVOD V GEOMETRIJSKO TOPOLOGIJO: 2. TEST
18. 4. 2014

1. naloga (5 točk)

a. Na podprostoru ravnine $[-1,1] \times [-1,1]$ je podana ekvivalenčna relacija

$$(x,y) \sim (x',y') \iff (x,y) = (x',y') \text{ ali } x = x' = -1 \text{ ali } x = x' = 1.$$

Eksplicitno dokaži, da je kvocientni prostor $[-1,1] \times [-1,1]/\sim$ homeomorfen ravninskemu disku $\mathbb{B}^2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

b. Na kartezičnem produktu $\mathbb{S}^1 \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^3$ je podana ekvivalenčna relacija

$$(\zeta,y) \sim (\zeta',y') \iff (\zeta,y) = (\zeta',y') \text{ ali } y = y' = -1 \text{ ali } y = y' = 1.$$

Naj bo $q\colon \mathbb{S}^1 \times [-1,1] \to X$ kvocientna projekcija.
Poišči primeren podprostor kakega evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, ki je homeomorfen kvocientnemu prostoru $X/q(\{1\} \times [-1,1])$.

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

2. naloga (5 točk)

Naj topološka grupa G deluje na topološki prostor X in naj X/G označuje prostor orbit.

a. Naj bo G končna in naj X zadošča aksiomu T_4. Dokaži, da tedaj tudi X/G zadošča aksiomu T_4 in sicer s konstrukcijo Urisonovih funkcij.
Namig: Pri dani primerni funkciji $\varphi\colon X \to [0,1]$ si pomagaj s funkcijami $\varphi_g\colon X \to [0,1]$, $\varphi_g(x) = \varphi(g \cdot x)$, za različne $g \in G$.

b. Naj bo G kompaktna in naj bo orbita $G \cdot x_0$ neke točke x_0 vsebovana v odprti množici W. Dokaži, da obstaja taka okolica U točke x_0, da je orbita $G \cdot x$ vsebovana v W za vsak $x \in U$.

c. $(*)$ Naj bo G kompaktna in naj X zadošča aksiomu T_4. Dokaži, da tudi X/G zadošča aksiomu T_4.
Opomba: Možni so različni dokazi (z uporabo točke **b**.).

Teoretična naloga (5 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna (**P**) oziroma napačna (**N**). Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Naj bosta X in Y topološka prostora in naj bo $f\colon A \to Y$ zvezna preslikava, kjer je $A \subset X$. Če je A zaprta množica v X, je kvocientna projekcija $X \coprod Y \to X \cup_f Y$ zaprta preslikava.
- ☐ Suspenzija vsakega topološkega prostora je kompakten prostor.
- ☐ Stožec nad povezanim topološkim prostorom je povezan prostor.
- ☐ Vsako zvezno preslikavo $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ je mogoče razširiti do zvezne preslikave $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
- ☐ Naj bo X kompakten Hausdorffov prostor in naj bosta A in B neprazni kompaktni podmnožici v X. Tedaj obstaja taka zvezna funkcija $f\colon X \to [0,1]$, da velja $f(A) = \{0\}$ ter $f(B) = \{1\}$.
- ☐ Interval $[0,1)$ je retrakt intervala $(-\infty,1)$.
- ☐ Obstaja retrakcija ravnine $\mathbb{R}^2$ na podprostor $\{(-1,0),(1,0)\}$.
- ☐ Naj bo $A \subset B \subset X$. Če je A retrakt prostora B in je B retrakt prostora X, je A retrakt prostora X.
- ☐ Krožnica $\mathbb{S}^1$ je kontraktibilen prostor.
- ☐ Vsak homeomorfizem $\mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ ima vsaj eno negibno točko.