UVOD V GEOMETRIJSKO TOPOLOGIJO: 2. TEST
25. 5. 2012

1. naloga (5 točk)

Naj bo $n \in \mathbb{N} - \{1\}$, naj bo $\zeta = e^{2\pi i/n} \in \mathbb{C}$, in naj bo $Q = \{1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}\} \subset \mathbb{C}$ multiplikativna grupa n-tih korenov kompleksne enote.
Definirajmo preslikavo $\Phi\colon Q \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ s predpisom

$$\Phi(\zeta^k, z) = \zeta^k \cdot z.$$

a. Prepričaj se, da je Φ delovanje grupe Q na $\mathbb{C}$ in da zožitev $\Phi|_{Q \times S^1}$ podaja delovanje grupe Q na enotski krožnici S^1.
b. Kateremu znanemu prostoru je homeomorfen prostor orbit S^1/Q?
c. Kateremu znanemu prostoru je homeomorfen prostor orbit $\mathbb{C}/Q$?

Rešitve oziroma odgovore utemelji.

2. naloga (5 točk)

a. Naj za zvezni funkciji $\varphi, \psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ velja $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$ za vse $x \in \mathbb{R}^n$. Naj bo

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,|\, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}.$$

Dokaži, da je X retrakt prostora $\mathbb{R}^{n+1}$.

b. Podana je množica $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} \subset (0, \infty)$. Definirajmo množico:

$$A = \mathbb{R} \times \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{n\} \times [0, a_n].$$

Dokaži, da je A retrakt ravnine $\mathbb{R}^2$.
Nasvet: Retrakcijo $\mathbb{R}^2 \to A$ sestavi kot kompozitum retrakcij $\mathbb{R}^2 \to X \to A$, kjer je X primeren podprostor ravnine $\mathbb{R}^2$.

c. (**Naloga za bonus!**) Naj bo $\{r_n \,|\, n \in \mathbb{N}\} \subset (0, \infty)$ in naj bo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zaporedje v $\mathbb{R}^2$ brez stekališča. Definirajmo

$$B = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} \times [0, r_n].$$

Dokaži, da je B retrakt prostora $\mathbb{R}^3$.

Teoretična naloga (5 točk)

Za vsako od spodnjih trditev v pripadajoči kvadratek čitljivo označi, če je trditev pravilna (**P**) oziroma napačna (**N**).
Če ne veš, pusti kvadratek prazen, ker se nepravilni odgovor šteje negativno!

- ☐ Vsaka topološka grupa je povezan prostor.
- ☐ Zlepek normalnih prostorov X in Y preko zvezne preslikave $f\colon A \to Y$, kjer je A zaprta v X, je Hausdorffov prostor.
- ☐ Kot kvocientni prostor prostora $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ je projektivni prostor $\mathbb{R}P^n$ nekompakten.
- ☐ Projektivni prostori so Hausdorffovi.
- ☐ Vsak retrakt ravnine $\mathbb{R}^2$ je absolutni ekstenzor za normalne prostore.
- ☐ Krožnica S^1 je retrakt enotskega kroga $\mathbb{B}^2$.
- ☐ Naj bo $H = S^2 \cap \mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ zaprta hemisfera enotske sfere S^2. Če je $f\colon S^2 \to S^2$ taka zvezna preslikava, za katero je $f(H) \subset H$, ima f vsaj eno negibno točko.
- ☐ Vsaka zvezna preslikava $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ima vsaj eno negibno točko.
- ☐ Vsako zvezno preslikavo $(-5, 5) \to [0, 1]$ je mogoče razširiti do zvezne preslikave $\mathbb{R} \to [0, 1]$.
- ☐ Naj bo U odprta množica v $\mathbb{R}^n$. Vsaka zvezna injekcija $U \to \mathbb{R}^n$ je odprta preslikava.