

UVOD V GEOMETRIJSKO TOPOLOGIJO, 1. SKLOP

LEGENDA

TKT ... topologija konvergence po točkah,
TEK ... topologija enakomerne konvergence,
TEKK ... topologija enakomerne konvergence na kompaktih,
KOT ... kompaktno odprta topologija,
 $C(X, Y)$... množica zveznih preslikav $f: X \rightarrow Y$ za prostora X in Y .

1. NALOGA

Naj bo X poljuben topološki prostor, \mathbb{R} pa evklidska premica. Dalje naj bo a odlikovana točka v X .
Dokaži, da je preslikava

$$E: C(X, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(f) = f(a),$$

zvezna kot preslikava $(C(X, \mathbb{R}), \text{TKT}) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$.

2. NALOGA

Definirajmo preslikavo $\mathcal{J}: C([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ s predpisom:

$$\mathcal{J}(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

Dokaži, da je $\mathcal{J}: (C([a, b], \mathbb{R}), \text{TEK}) \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna preslikava.

3. NALOGA

Podprostor X prostora $(C([0, \infty), \mathbb{R}), \text{TEKK})$ je podan s predpisom:

$$X = \left\{ f \mid \int_0^\infty |f(t)| dt < \infty \right\}.$$

Dokaži, da preslikava $\mathcal{J}: X \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{J}(f) = \int_0^\infty f(t) dt$, ni zvezna.

4. NALOGA

Podmnožica A prostora $(C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \text{TEKK})$ je podana s predpisom

$$A = \{f \mid f \text{ na intervalu } [0, 1] \text{ nima nobene ničle}\}.$$

Izračunaj $\text{Int}(A)$ in $\text{Cl}(A)$.

5. NALOGA

Naj bo X poljuben, Y pa naj bo metrični prostor. Dalje naj bo A podprostor v X .
Definirajmo preslikavo

$$R: C(X, Y) \rightarrow C(A, Y), \quad R(f) = f|_A.$$

- Dokaži, da je $R: (C(X, Y), \text{TEKK}) \rightarrow (C(A, Y), \text{TEKK})$ zvezna preslikava.
- Dokaži, da je $R: (C(X, Y), \text{KOT}) \rightarrow (C(A, Y), \text{KOT})$ zvezna preslikava.

6. NALOGA

Naj bo X poljuben, Y pa naj bo metrični prostor.

Dokaži, da se topologiji TEKK in KOT na množici $C(X, Y)$ ujemata.

7. NALOGA

Naj bosta X in Y topološka prostora in naj bo $i \in \{1, 2, 3\}$.

Dokaži, da prostor $(C(X, Y), \text{KOT})$ zadošča separacijskemu aksiomu T_i natanko tedaj, ko Y zadošča separacijskemu aksiomu T_i .

8. NALOGA

Naj bosta X in Y topološka prostora. Dokaži, da je preslikava

$$c: Y \rightarrow C(X, Y), \quad c(y) = \text{konstantna preslikava z vrednostjo } y,$$

vložitev $Y \rightarrow (C(X, Y), \text{KOT})$.