UVOD V GEOMETRIJSKO TOPOLOGIJO, 2. SKLOP

Dogovor

Vsi prostori preslikav so opremljeni s kompaktno odprto topologijo.

1. naloga

Naj bo $F\colon X \times Y \to Z$ zvezna preslikava.

a. Za vsak $x \in X$ je preslikava $F_x\colon Y \to Z$, $F_x(y) = F(x, y)$, zvezna.
b. Preslikava $\hat{F}\colon X \to C(Y, Z)$, $\hat{F}(x) = F_x$, je zvezna.

2. naloga

Naj bo X poljuben topološki prostor. Tedaj je $C(X, \mathbb{R})$ s potmi povezan prostor.

3. naloga

Naj bo $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in naj bo $\varepsilon > 0$. Tedaj obstaja končen nabor realnih števil, označimo jih $a_0, a_1, \ldots, a_n$, da velja

$$|a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x} + \cdots + a_n e^{nx} - f(x)| < \varepsilon \text{ za vsa števila } x \in [a, b].$$

4. naloga

V prostoru zveznih preslikav $C(S^1, \mathbb{C})$ označimo množico

$$\mathcal{P} = \left\{ f\colon S^1 \to \mathbb{C} \mid f \text{ je zožitev kakega polinoma } \mathbb{C} \to \mathbb{C} \right\}.$$

Množica $\mathcal{P}$ ni gosta v $C(S^1, \mathbb{C})$.

5. naloga

Naj bo X metrični prostor in $\mathcal{A}$ kompleksna (unitalna) podalgebra v $C(X, \mathbb{C})$, ki vsebuje konstante, loči točke na X in je zaprta za konjugacijo. Tedaj je $\mathcal{A}$ gosta v $C(X, \mathbb{C})$.

6. naloga

„Trigonometrični“ kompleksni polinom je funkcija oblike

$$f(\zeta) = c_{-n}\zeta^{-n} + c_{-(n-1)}\zeta^{-(n-1)} + \cdots + c_0 + c_1\zeta + \cdots + c_n\zeta^n = \sum_{k=-n}^{n} c_k \zeta^k.$$

Dokaži, da je množica vseh trigonometričnih polinomov gosta v $C(S^1, \mathbb{C})$.