8. Navadne diferencialne enačbe

8.1. Začetni problem prvega reda

Iščemo funkcijo $y(x)$, ki zadošča diferencialni enačbi

$$y' = f(x, y)$$

in začetnemu pogoju

$$y(x_0) = y_0,$$

kjer je f dana dovolj gladka funkcija x in y.

Numerična rešitev je sestavljena iz zaporedja $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ in pripadajočega zaporedja $y_0, y_1, y_2, \ldots$, tako da je vsak y_n približek za rešitev v x_n, oziroma

$$y_n \approx y(x_n), \quad n = 0, 1 \ldots.$$

Moderne metode avtomatično določajo velikosti korakov $h_n = x_{n+1} - x_n$ tako, da napake približkov y_n ostanejo v vnaprej določenih mejah.

Osnovna delitev metod

Rešujemo začetni problem $y' = f(x, y)$ pri začetnemu pogoju $y(x_0) = y_0$.

Računamo približke $y_0, y_1, y_2, \ldots$ za vrednosti $y(x_0), y(x_1), y(x_2), \ldots$ v točkah $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$.

Označimo

$$\begin{aligned} y(x_i) &: \text{ točna vrednost rešitve v } x_i, \\ y_i &: \text{ izračunani približek za } y(x_i). \end{aligned}$$

Metode za reševanje začetnega problema delimo na:

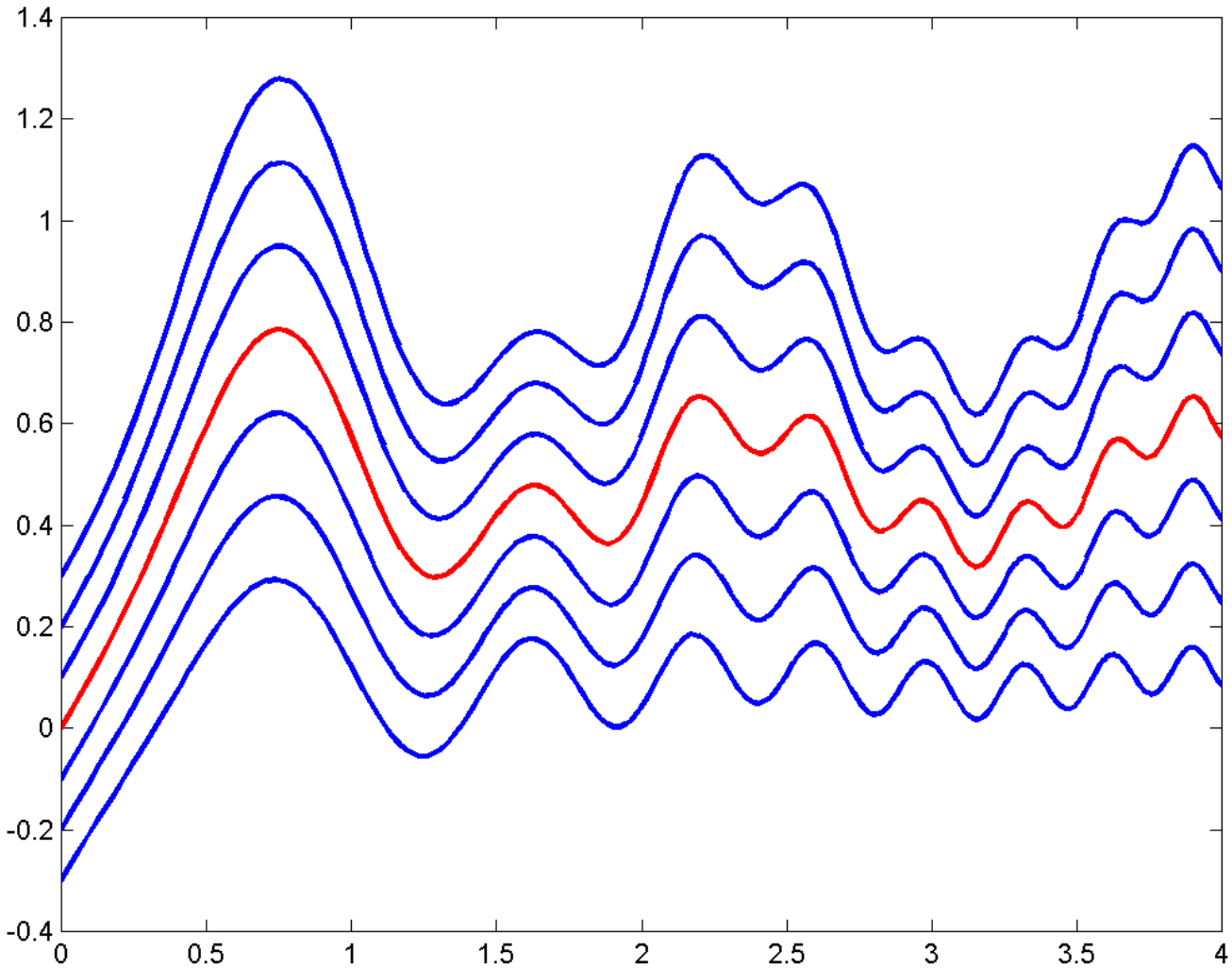
- enokoračne metode: y_{n+1} izračunamo iz y_n,
- večkoračne metode: y_{n+1} izračunamo iz $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}$.

Metode ločimo še na:

- eksplicitne metode: imamo direktno formulo za y_{n+1},
- implicitne metode: y_{n+1} dobimo tako, da rešimo nelinearno enačbo.

Zgled rešitve in vej

Rešitve za $y' = \cos(3x^2) + \sin(4x)y$ pri začetnih pogojih $y(0) = -0.3, -0.2, \ldots, 0.3$.



Obstoj rešitve

Funkcija $f(x, y)$, kjer je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, na območju $D = [a, b] \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$ zadošča Lipschitzovemu pogoju na y s konstanto L, če za poljubna $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ velja

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Zadostni pogoj, da je f Lipschitzova je, da je f odvedljiva po y, saj je potem lahko

$$L = \max_{(x,y)\in D} |f_y(x, y)|.$$

Če f ustreza Lipschitzovemu pogoju, potem za vsak $(x_0, y_0) \in D$ obstaja podinterval $[a, b]$, ki vsebuje x_0, na katerem rešitev začetnega problema $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, obstaja in je enolična.

Občutljivost začetnega problema

Naj f ustreza Lipschitzovemu pogoju s konstanto L. Točna rešitev začetnega problema $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, je $y(x)$.

Če je $\widetilde{y}(x)$ rešitev začetnega problema z zmotenim začetnim pogojem $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = \widetilde{y}_0$, potem za poljuben $x \geq x_0$ velja

$$|\widetilde{y}(x) - y(x)| \leq e^{L(x-x_0)}|\widetilde{y}_0 - y_0|.$$

Če namesto začetnega problema $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, rešujemo bližnji problem $\widehat{y}' = \widehat{f}(x, \widehat{y})$, $\widehat{f}(x_0) = \widehat{y}_0$, velja

$$|\widehat{y}(x) - y(x)| \leq e^{L(x-x_0)}|\widehat{y}_0 - y_0| + \frac{e^{L(x-x_0)} - 1}{L}\|\widehat{f} - f\|,$$

kjer je $\|\widehat{f} - f\| = \max_{(x,y)\in D} |\widehat{f}(x, y) - f(x, y)|$.

Stabilnost rešitve začetnega problema

Rešitev začetnega problema $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, je stabilna, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $\widetilde{y}(x)$, ki je rešitev $\widetilde{y}' = f(x, \widetilde{y})$, $\widetilde{y}(x_0) = \widetilde{y}_0$, kjer je $|\widetilde{y}_0 - y_0| < \delta$, velja $|\widetilde{y}(x) - y(x)| \leq \epsilon$ za vse $x \geq x_0$.

Če ima začetni problem stabilno rešitev, lahko pričakujemo, da rešitev pri zmotenem začetnem pogoju ostane blizu točne rešitve.

Stabilna rešitev je asimptotično stabilna, če gre $|\widetilde{y}(x) - y(x)|$ proti 0, ko gre x proti neskončnosti.

Pri asimptotični rešitvi lahko pričakujemo, da bo napaka zmotenega začetnega pogoja šla proti 0, ko gre x proti neskočnosti.

Zgled: Rešitev diferencialne enačbe $y'(x) = \lambda y$, $y(0) = y_0$, kjer je $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, je

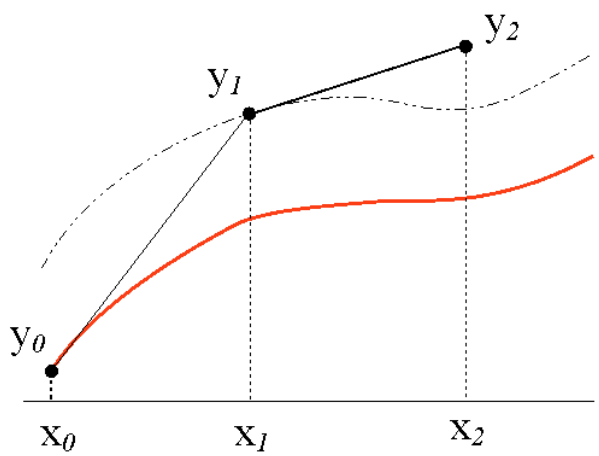
$$y(x) = y_0 e^{\lambda x} = y_0 e^{ax}(\cos(bx) + i \sin(bx)).$$

Rešitev je asimptotično stabilna pri re$(\lambda) < 0$, stabilna pri re$(\lambda) \leq 0$, in nestabilna pri re$(\lambda) > 0$.

8.2. Eulerjeva metoda

Najpreprostejša enokoračna metoda je eksplicitna Eulerjeva metoda z nastavkom

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \\ x_{n+1} &= x_n + h \end{aligned}$$

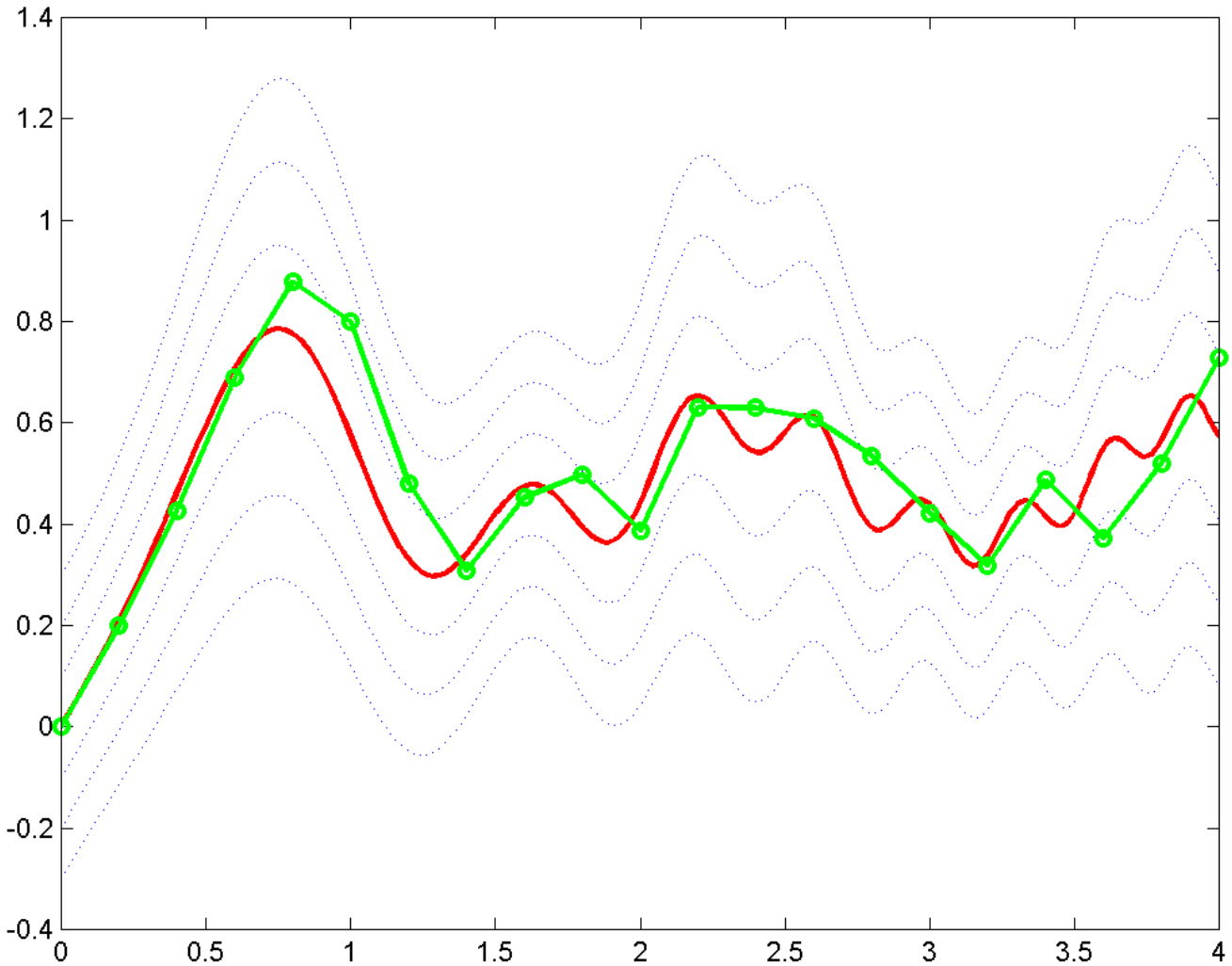


Uporablja fiksen premik h.
Ideja je, da se v vsaki točki premaknemo v smeri tangente.

Implicitna Eulerjeva metoda je $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$. Pri implicitni metodi je potrebno v vsakem koraku rešiti nelinearni sistem za y_{n+1}.

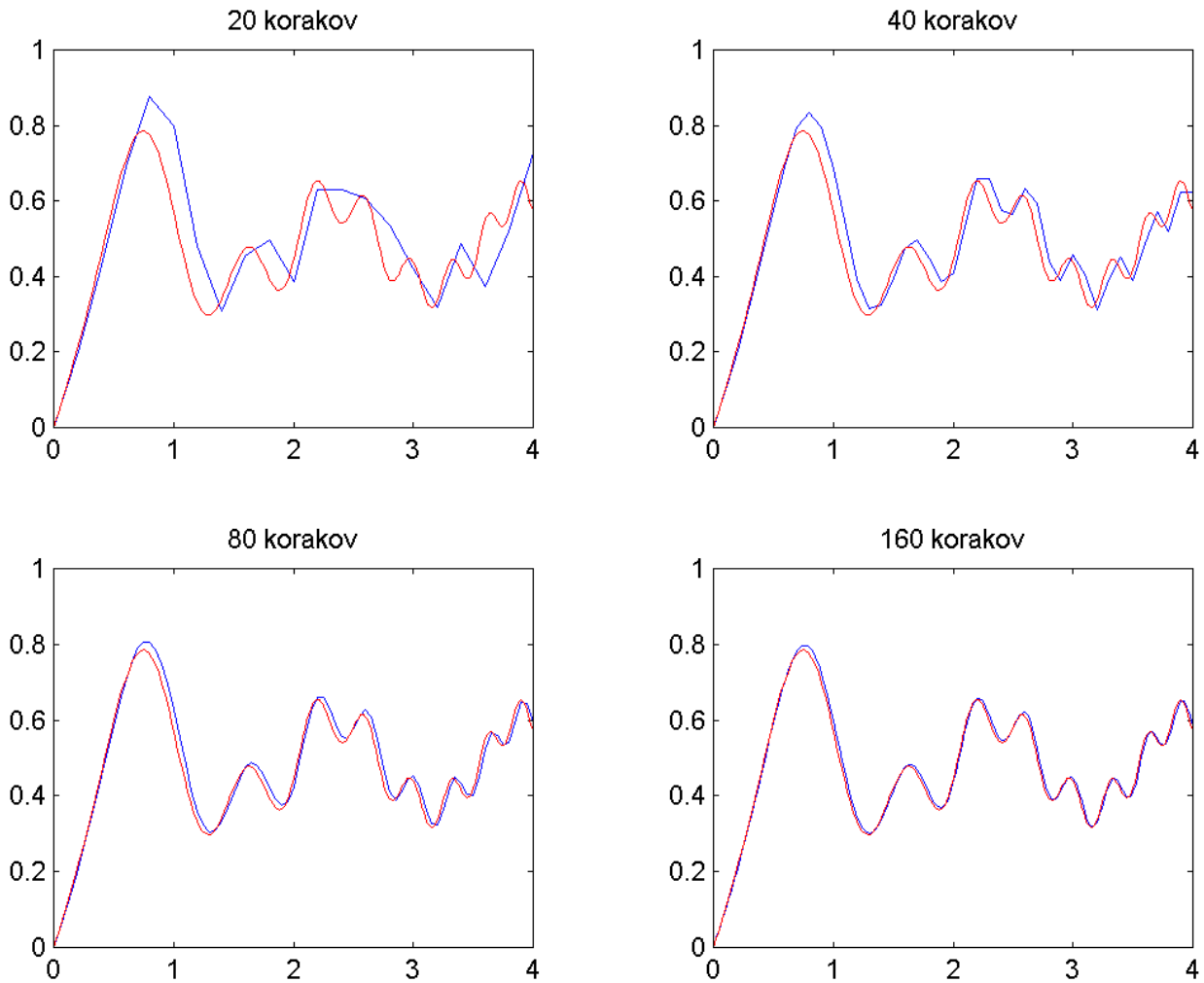
Zgled

Eksplicitna Eulerjeva metoda na primeru $y' = \cos(3x^2) + \sin(4x)y$, $y(0) = 1$, $h = 0.2$



Zgled

Primerjava eksplicitne Eulerjeve metode na primeru $y' = \cos(3x^2) + \sin(4x)y$, $y(0) = 1$, interval je $[0, 4]$.



Taylorjeva vrsta

Če $y' = f(x, y)$ odvajamo, dobimo

$$\begin{aligned} y' &= f \\ y'' &= f_x + f_y y' = f_x + f_y f \\ y''' &= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_y(f_x + f_y f) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Po Taylorjevi vrsti izračunamo $y(x_1) = y(x_0 + h) = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' + \cdots$.

Zgled $y' = xy + 1$, $y(0) = 0$, $y(0.2) = ?$

$$\begin{aligned} y' = xy + 1 &\implies y'(0) = 1 \\ y'' = xy' + y &\implies y''(0) = 0 \\ y''' = xy'' + 2y' &\implies y'''(0) = 2 \end{aligned}$$

$$y(h) = h + \frac{1}{3}h^3 + \cdots.$$

Pri $h = 0.2$ dobimo $y_1 = 0.2 + 0.00267 = 0.20267$. Nadaljujemo s točko $(0.2, 0.20267)$.

Red lokalne napake

Definicija 1. *Pravimo, da je ima metoda lokalno napako reda k, če se pri točni vrednosti $y_n = y(x_n)$ izračunani y_{n+1} ujema z razvojem $y(x_n + h)$ v Taylorjevo vrsto okrog x_n do vključno člena h^k.*

Lokalna napaka predstavlja napako v enem samem koraku.

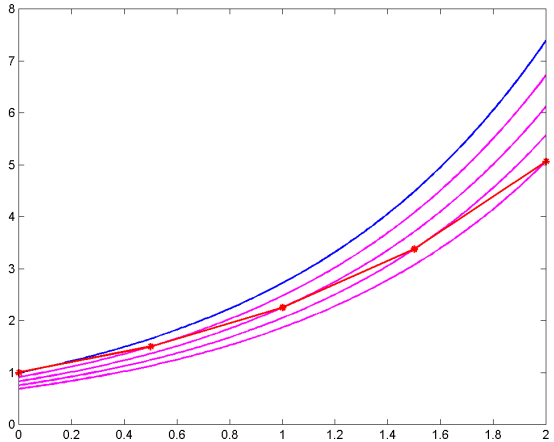
Metoda iz prejšnjega zgleda ima red 3, sicer pa z razvijanjem v Taylorjevo vrsto lahko dobimo metodo poljubnega reda.

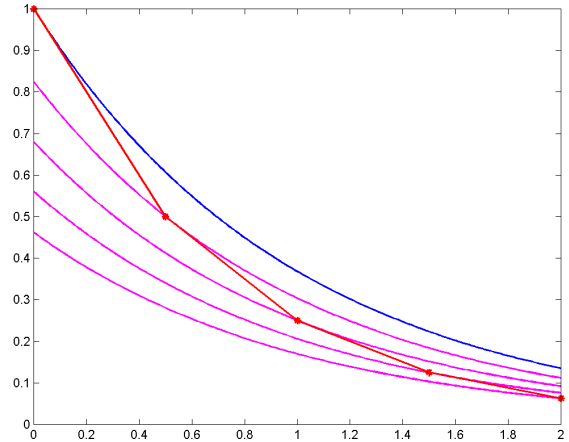
Eulerjeva metoda (eksplicitna in implicitna) ima red 1.

V grobem velja, da ima metoda z lokalno napako reda k globalno napako reda $k-1$.

Globalna napaka

Globalna napaka ni preprosto kar vsota lokalnih napak.





Numerična metoda za reševanje začetnega problema je stabilna, kadar majhne motnje ne povzročijo divergence numerične rešitve.

Vsaka enokoračna metoda se da zapisati v obliki $y_{n+1} = y_n + \theta(x_n, y_n, h)$, kjer je $\theta(x, y, h)$ funkcija prirastka. Če $\theta(x, y, h)$ zadošča Lipschitzovemu pogoju na y s konstanto L, lokalna napaka v vsakem koraku pa je po absolutni vrednosti omejena z Dh^{p+1}, potem za globalno napako velja

$$|y_n - y(x)| \leq Dh^p \frac{e^{L(x-x_0)} - 1}{L} + e^{L(x-x_0)} |y_0 - y(x_0)|.$$

Območje stabilnosti

Modelna enačba je $y' = \lambda y$, $y(0) = y_0$, ki ima rešitev $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$. Če je re$(\lambda) < 0$, je rešitev asimptotično stabilna.

Zgled 1: Če vzamemo eksplicitno Eulerjevo metodo, potem dobimo $y_1 = (1 + \lambda h) y_0$ in $y_k = (1 + \lambda h)^k y_0$.

Če naj bo pri re$(\lambda) < 0$ Eulerjeva metoda stabilna, mora veljati $|1 + \lambda h| < 1$, torej mora biti h omejen ($h\lambda$ mora ležati v krogu z radijem 1 okrog -1).

Zgled 2: Če vzamemo implicitno Eulerjevo metodo, potem dobimo $(1 - \lambda h) y_1 = y_0$ in $y_k = \left(\frac{1}{1-\lambda h}\right)^k y_0$.

Sedaj mora pri re$(\lambda) < 0$ veljati $\left|\frac{1}{1-\lambda h}\right| \leq 1$, torej h ni omejen in za ta začetni problem je implicitna Eulerjeva metoda vedno stabilna.

8.3 Runge-Kutta metode

Najprej izračunamo

$$k_i = hf(x_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij} k_j), \quad i = 1, \ldots, m,$$

nato pa

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i k_i.$$

Pri tem je m stopnja R-K metode, kar ne smemo zamenjevati z redom metode. Konstante α_i, β_{ij} in γ_i določimo tako, da se y_{n+1} čim bolj ujema z razvojem $y(x_n + h)$ v Taylorjevo vrsto. Pri tem velja $\alpha_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_{ij}$.

V primeru, ko je $\beta_{ij} = 0$ za $i \leq j$, je metoda eksplicitna, sicer pa implicitna.

Dvostopenjska eksplicitna Runge-Kutta metoda reda 2

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \gamma_1 k_1 + \gamma_2 k_2. \end{aligned}$$

Z razvijanjem v Taylorjevo vrsto dobimo

$$\begin{aligned} k_1 &= hf \\ k_2 &= hf + \alpha h^2 f_x + \beta h k_1 f_y + \mathcal{O}(h^3) \\ y_{n+1} &= y_n + (\gamma_1 + \gamma_2) hf + \gamma_2 \alpha h^2 f_x + \gamma_2 \beta h^2 f f_y + \mathcal{O}(h^3), \end{aligned}$$

kar primerjamo z

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hf + \frac{1}{2} h^2 (f_x + f f_y) + \mathcal{O}(h^3).$$

Sledi

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \qquad \alpha\gamma_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad \beta\gamma_2 = \tfrac{1}{2}.$$

Sistem ima več rešitev, saj za poljubni $\gamma_2 \neq 0$ dobimo

$$\gamma_1 = 1 - \gamma_2, \quad \alpha = \frac{1}{2\gamma_2}, \quad \beta = \frac{1}{2\gamma_2}.$$

Zgleda dvostopenjske R-K metode drugega reda sta:

- Heunova metoda

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + h, y_n + k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad \text{napaka}: \ \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

- modificirana Eulerjeva metoda

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + k_2, \quad \text{napaka}: \ \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Štiristopenjska eksplicitna Runge-Kutta metoda reda 4

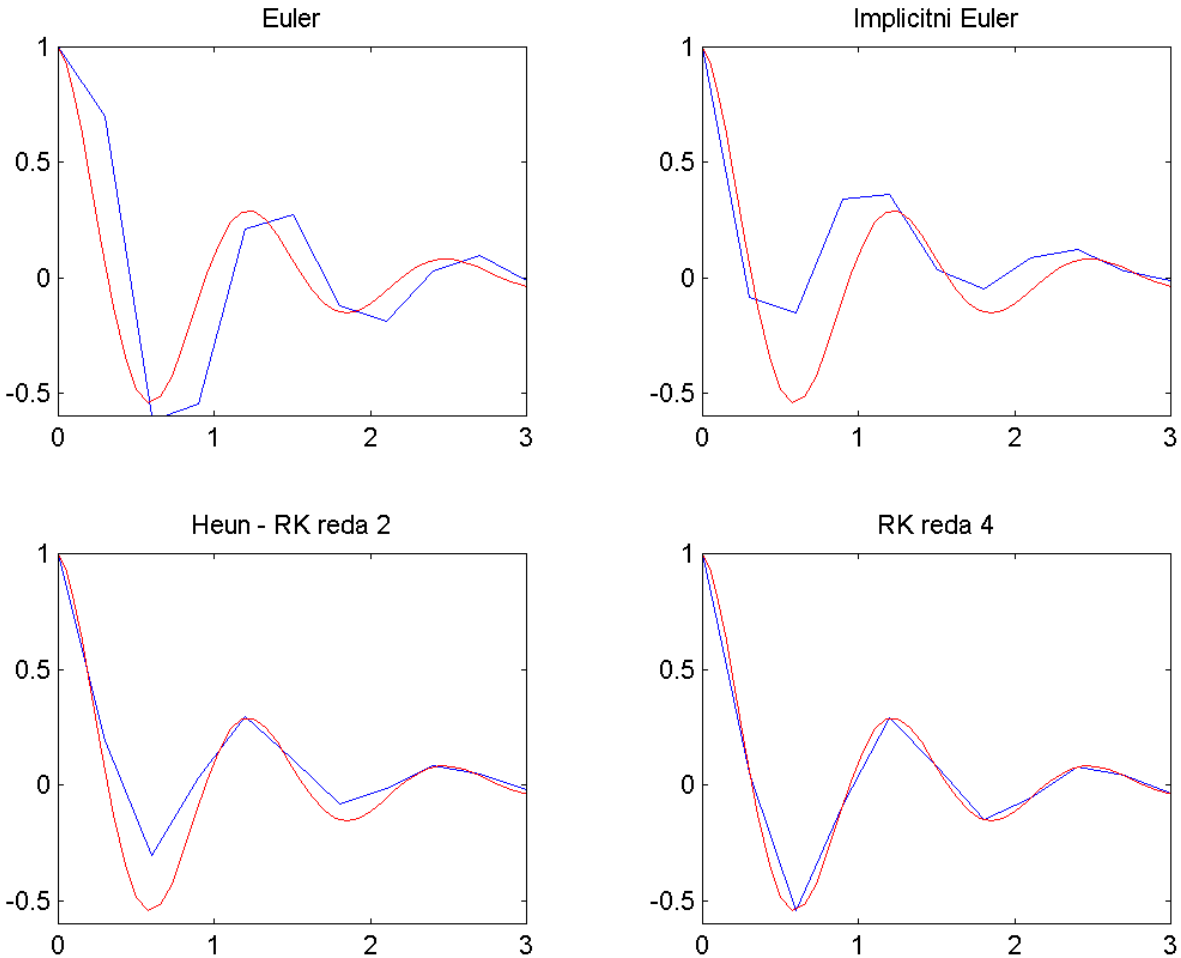
$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1) \\
k_3 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_2) \\
k_4 &= hf(x_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad \text{napaka : } \mathcal{O}(h^5).
\end{aligned}
$$

Zgled: Rešujemo $y' = -y - 5e^x \sin(x)$, $y(0) = 1$ in vzemimo $h = 0.1$. Dobimo

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_0, y_0) = 0.1 * f(0, 1) = -0.1 \\
k_2 &= hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_1) = 0.1 * f(0.05, 0.95) = -0.12127 \\
k_3 &= hf(x_0 + \tfrac{1}{2}h, y_0 + \tfrac{1}{2}k_2) = 0.1 * f(0.05, 0.93936) = -0.12021 \\
k_4 &= hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.1 * f(0.1, 0.87979) = -0.14315 \\
y_1 &= y_0 + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0.87898.
\end{aligned}
$$

Primerjava metod različnega reda

Na diferencialni enačbi $y' = -y - 5e^{-x}\sin(5x)$, $y(0) = 1$ na intervalu $[0, 3]$ primerjamo eksplicitno in implicitno Eulerjevo metodo (red 1), Heunovo metodo (red 2) in Runge-Kuttino metodo reda 4, pri vseh je $h = 0.3$.



8.4 Adaptivna ocena koraka

Če imamo na voljo oceno lokalne napake, lahko h adaptivno prilagajamo. Denimo, da po 4 stopenjski R-K metodi reda 4 iz $y(x)$ izračunamo $y(x+2h)$ enkrat s korakom $2h$, drugič pa v dveh korakih s korakom h. Podobno kot pri Richardsonovi ekstrapolaciji dobimo

$$\begin{aligned} y(x+2h) &= y^{(1)} + (2h)^5 \cdot C_1 + \mathcal{O}(h^6) \\ y(x+2h) &= y^{(2)} + 2(h)^5 \cdot C_2 + \mathcal{O}(h^6) \end{aligned}$$

in

$$\Delta = \frac{y^{(2)} - y^{(1)}}{15}$$

je ocena za lokalno napako $y^{(1)}$.

Ko je Δ velik, razpolovimo h, če je dovolj majhen pa lahko h podvojimo.

Za izračun Δ in $y^{(1)}$ potrebujemo 11 izračunov f (4 izračune za vsako R-K, prvi pa se ponovi dvakrat).

Runge-Kutta-Fehlbergova metoda

Boljši primer adaptivne metode je Fehlbergova metoda, kjer vzamemo 6 stopenjsko R-K metodo

$$k_i = hf(x_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j), \quad i = 1, \ldots, 6,$$

potem pa iz istih $k_1, \ldots, k_6$ sestavimo metodo reda 5

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{6} \gamma_i k_i$$

in metodo reda 4

$$y^*_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{6} \gamma^*_i k_i.$$

Ocena za napako y^*_{n+1} je potem kar $y_{n+1} - y^*_{n+1} = \sum_{i=1}^{6} (\gamma_i - \gamma^*_i) k_i$.

Runge-Kutta-Fehlbergova metoda

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_n, y_n) \\
k_2 &= hf(x_n + \tfrac{1}{4}h, y_n + \tfrac{1}{4}k_1) \\
k_3 &= hf(x_n + \tfrac{3}{8}h, y_n + \tfrac{3}{32}k_1 + \tfrac{9}{32}k_2) \\
k_4 &= hf(x_n + \tfrac{12}{13}h, y_n + \tfrac{1932}{2197}k_1 - \tfrac{7200}{2197}k_2 + \tfrac{7296}{2197}k_3) \\
k_5 &= hf(x_n + h, y_n + \tfrac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \tfrac{3680}{513}k_3 - \tfrac{845}{4104}k_4) \\
k_6 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n - \tfrac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \tfrac{3544}{2565}k_3 + \tfrac{1859}{4104}k_4 - \tfrac{11}{40}k_5) \\
y_{n+1} &= y_n + \tfrac{16}{135}k_1 + \tfrac{6656}{12825}k_3 + \tfrac{28561}{56430}k_4 - \tfrac{9}{50} + \tfrac{2}{55}k_6, \quad \text{napaka : } \mathcal{O}(h^6) \\
y^*_{n+1} &= y_n + \tfrac{25}{216}k_1 + \tfrac{1408}{2565}k_3 + \tfrac{2197}{4104}k_4 - \tfrac{1}{5}k_5, \quad \text{napaka : } \mathcal{O}(h^5).
\end{aligned}
$$

V naslednjem koraku vzamemo razmik qh, kjer je ϵ željena natančnost

$$
q = \left(\frac{\epsilon h}{2|y^*_{n+1} - y_{n+1}|} \right)^{1/4}.
$$

8.5 Reševanje začetnih problemov v Matlabu

Na voljo imamo več funkcij. Ena izmed njih je `ode45`. Kličemo jo v obliki `[x,y]=ode45(fun,span,y0)`, kjer je `fun` ime funkcije `yodv=fun(x,y)`, ki pri x in y (lahko vektor) izračuna vrednosti odvoda iz diferencialne enačbe.

Zgled uporabe:

```
funcion yprime=fun(t,x)
yprime=-y-5*exp(-t)*sin(5*t);

tspan=[0 3]; yzero=1;
[x,y]=ode45('fun',tspan,y0)
plot(x,y,'*--');
```

Ostale metode so še `ode23`, `ode113`, `ode23s`, ...

8.6 Sistemi diferencialnih enačb prvega reda

Sistem

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_k) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_k) \\ &\vdots \\ y_k' &= f_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_k) \end{aligned}$$

z začetnimi pogoji

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_k(x_0) = y_{k0}$$

rešujemo tako kot eno enačbo, če jo zapišemo v vektorski obliki

$$Y' = F(x, Y),$$

kjer je $Y = [y_1\ y_2\ \cdots\ y_k]^T$.

Zgled

Heunovo metodo

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + h, y_n + k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2). \end{aligned}$$

za sistem

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y, z) \\ z' &= g(x, y, z) \end{aligned}$$

uporabimo v obliki

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n, z_n) \\ l_1 &= hg(x_n, y_n, z_n) \\ k_2 &= hf(x_n + h, y_n + k_1, z_n + l_1) \\ l_2 &= hg(x_n + h, y_n + k_1, z_n + l_1) \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ z_{n+1} &= z_n + \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2). \end{aligned}$$

Zgled

Iz

$$\begin{aligned} y' &= x - 3y + 2z \\ z' &= 1 + 2y - z^2 \end{aligned}$$

tako dobimo

$$\begin{aligned} k_1 &= h(x_n - 3y_n + 2z_n) \\ l_1 &= h(1 + 2y_n - z_n^2) \\ k_2 &= h((x_n + h) - 3(y_n + k_1) + 2(z_n + l_1)) \\ l_2 &= h(1 + 2(y_n + k_1) - (z_n + l_1)^2) \\ y_{n+1} &= y_n + \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ z_{n+1} &= z_n + \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2). \end{aligned}$$

8.7 Diferencialne enačbe višjega reda

Začetni problem drugega reda

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y') \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0' \end{aligned}$$

lahko numerično rešimo tako, da ga prevedemo na naslednji sistem enačb prvega reda

$$\begin{aligned} y' &= p, & y(x_0) &= y_0, \\ p' &= f(x, y, p), & p(x_0) &= y_0'. \end{aligned}$$

Zgled 1. *Začetni problem drugega reda*

$$y'' = x + y^2$$

in $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, *lahko prevedemo na sistem dveh enačb prvega reda*

$$\begin{aligned} y' &= p, & y(0) &= 1, \\ p' &= x + y^2, & p(0) &= 0. \end{aligned}$$

8.8 Večkoračne metode

Splošni nastavek je

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n-i} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n-i} = 0,$$

kjer je $f_i = f(x_i, y_i)$, privzamemo pa še $\alpha_0 = 1$. Če je $\beta_0 = 0$, je metoda eksplicitna, sicer pa implicitna.

Adamsove metode

Adamsove metode dobimo tako, da enačbo $y' = f(x, y)$ integriramo na $[x_n, x_{n+1}]$

$$y_{n+1} - y_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y' dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx,$$

f pa nadomestimo z interpolacijskim polinomom na točkah:

a) $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k+1}$: eksplicitne Adams-Bashforthove formule

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h f_n, \quad \text{napaka } \mathcal{O}(h^2), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}), \quad \text{napaka } \mathcal{O}(h^3), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}), \quad \text{napaka } \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

b) $x_{n+1}, x_n, \ldots, x_{n-k+2}$: implicitne Adams-Moultonove formule

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h f_{n+1}, \quad \text{napaka } \mathcal{O}(h^2), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n), \quad \text{napaka } \mathcal{O}(h^3), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}), \quad \text{napaka } \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

Kombinacija prediktor–korektor

Ponavadi pri večkoračnih metodah uporabljamo prediktor-korektor kombinacijo eksplicitne in implicitne metode. Z eksplicitno metodo izračunamo prediktor y_{n+1}^P, za korektor implicitno metodo rešujemo iterativno tako, da na desno stran vstavimo približek y_{n+1}^P, na levi pa dobimo y_{n+1}^K. S tem se izognemo reševanju nelinearne enačbe.

Primer je Milneov par

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}), \quad \text{napaka } \mathcal{O}(h^5) \quad : \text{ prediktor} \\ y_{n+1} &= y_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}), \quad \text{napaka } \mathcal{O}(h^5) \quad : \text{ korektor} \end{aligned}$$

ki ga uporabljamo v obliki

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{(P)} &= y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}), \\ y_{n+1}^{(K)} &= y_{n-1} + \frac{h}{3}(f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(P)}) + 4f_n + f_{n-1}). \end{aligned}$$

Zgled uporabe metode prediktor–korektor

Milneov par

$$
\begin{aligned}
y_{n+1}^{(P)} &= y_{n-3} + \frac{4h}{3}(2f_n - f_{n-1} + 2f_{n-2}), \\
y_{n+1}^{(K)} &= y_{n-1} + \frac{h}{3}(f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(P)}) + 4f_n + f_{n-1})
\end{aligned}
$$

uporabimo na $y' = -y - 5e^{-x}\sin(5x)$, $y(0) = 1$. Denimo, da smo pri $h = 0.1$ že izračunali $y_1 = 0.79407$, $y_2 = 0.44235$, $y_3 = 0.05239$, sedaj pa iščemo y_4.

$$y_4^{(P)} = 1 + \tfrac{0.4}{3}(2 \cdot (-3.7472) + 3.8870 + 2 \cdot (-2.9631)) = -0.27115$$

$$y_4^{(K)} = 0.44235 + \tfrac{0.1}{3}(-2.7765 + 4 \cdot (-3.7472) - 3.8870) = -0.27939$$

Postopek lahko nadaljujemo, $y_4^{(K)}$ vnesemo na desno stran in dobimo nov približek.

$$y_4^{(K2)} = 0.44235 + \tfrac{0.1}{3}(-2.7682 + 4 \cdot (-3.7472) - 3.8870) = -0.27912$$

$$y_4^{(K3)} = 0.44235 + \tfrac{0.1}{3}(-2.7685 + 4 \cdot (-3.7472) - 3.8870) = -0.27913$$

Sedaj nadaljujemo s točko $y_4 = -0.27913$ in gremo na računanje y_5.

Rodovna polinoma in red večkoračne metode

Linearna večkoračna metoda ima obliko $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n-i} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n-i} = 0$, kjer je $\alpha_0 = 1$. Lokalna napaka $T(x_{n+1})$ je razlika med $y(x_{n+1})$ in y_{n+1} ob predpostavki, da so vse prejšnje vrednosti točne.

$$T(x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y(x_{n+1-i}) + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f(x_{n+1-i}, y(x_{n+1-i})).$$

Ko y in y' razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog točke x_{n-k}, dobimo

$$\begin{aligned} y(x_{n-k+j}) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(jh)^r}{r!} y^{(r)}(x_{n-k}), \\ y'(x_{n-k+j}) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(jh)^r}{r!} y^{(r+1)}(x_{n-k}). \end{aligned}$$

Ko razvoja vstavimo v izraz za lokalno napako, dobimo

$$T(x_{n+1}) = d_0 y(x_{n-k}) + d_1 h y'(x_{n-k}) + d_2 h^2 y''(x_{n-k}) + \cdots.$$

Metoda je reda p, če je $d_0 = d_1 = \cdots = d_p = 0$ in $d_{p+1} \neq 0$.

Ničelna stabilnost

Večkoračna metoda

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n-i} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n-i} = 0$$

mora biti stabilna za enačbo $y'(0) = 0$. Dobimo diferenčno enačbo

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n-i} = 0.$$

Njen karakteristični polinom $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i \xi^{k-i}$ ima k ničel $\xi_1, \ldots, \xi_k$. Splošna rešitev (pri enostavnih ničlah) je

$$y_n = \sum_{j=1}^{k} A_j \xi_j^n.$$

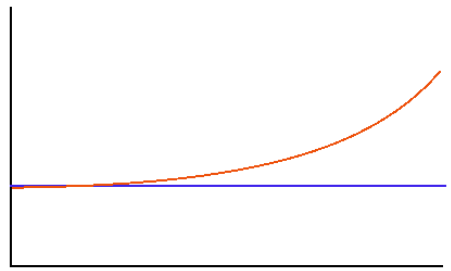
Za ničelno stabilnost mora veljati: $|\xi_i| \leq 1$ za $i = 1, \ldots, k$, pri čemer je pri $|\xi_j| = 1$ enostavna ničla.

Večkoračna metoda je konvergentna, če je reda vsaj 1 in je ničelno stabilna.

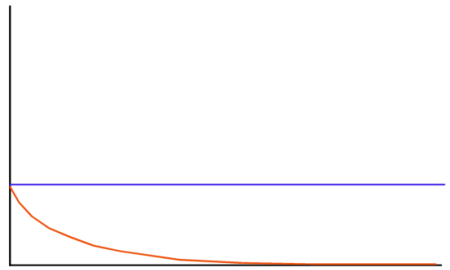
8.9 Inherentna stabilnost

Inherentna stabilnost je odvisna od problema in neodvisna od numerične metode.

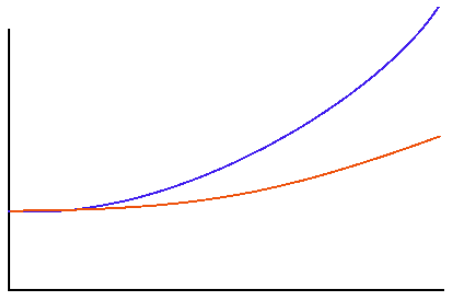
a) $y' = y - 1$, $y(0) = 1$, splošna rešitev je $y(x) = Ce^x + 1$ in $C = 0$, numerično pa dobimo $C \neq 0$. Problem je inherentno absolutno in relativno nestabilen.



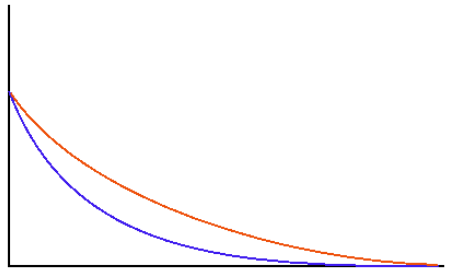
b) $y' = -y + 1$, $y(0) = 1$, splošna rešitev je $y(x) = Ce^{-x} + 1$ in $C = 0$, numerično pa dobimo $C \neq 0$. Problem je inherentno absolutno in relativno stabilen.



c) $y' = y + e^{2x}$, $y(0) = 1$, splošna rešitev je $y(x) = Ce^x + e^{2x}$ in $C = 0$, numerično pa dobimo $C \neq 0$. Problem je inherentno absolutno nestabilen in relativno stabilen.



d) $y' = -y - e^{2x}$, $y(0) = 1$, splošna rešitev je $y(x) = Ce^{-x} + e^{-2x}$ in $C = 0$, numerično pa dobimo $C \neq 0$. Problem je inherentno absolutno stabilen in relativno nestabilen.



Pri relativni nestabilnosti včasih pomaga, če obrnemo interval in računamo nazaj.

8.10 Pregled metod v Matlabu

V Matlabu je na voljo več metod za reševanje začetnih problemov, vse so adaptivne:

- `ode45`: Temelji na eksplicitnem Runge-Kutta pravilu reda 4 in 5 (podobno kot Fehlbergova metoda). To je metoda, ki najpogosteje daje dobre rezultate, zato je priporočljivo problem najprej poskusiti rešiti s to metodo.

- `ode23`: Temelji na eksplicitnem Runge-Kutta pravilu reda 2 in 3. Kadar ne zahtevamo velike natančnosti in v primeru majhne togosti je lahko metoda bolj učinkovita kot pa `ode45`.

- `ode113`: Gre za Adams-Bashworth-Moultonovo večkoračno prediktor-korektor metodo, kjer vedno naredimo en korak korektorja. Lahko je bolj učinkovita od `ode45` v primerih, ko zahtevamo visoko natančnost in pa kadar je funkcija f iz diferencialne enačbe še posebej zapletena in želimo imeti čim manj izračunov f.

Togi primeri

Prejšnje tri metode so namenjene za netoge sisteme. V primeru, ko ne dajejo dobrih rezultatov imamo lahko opravka s togim sistemom in takrat uporabimo naslednje metode:

- `ode15s`: Večkoračna metoda, ki temelji na metodah za numerično odvajanje. Je sicer manj učinkovita kot `ode45`, a deluje na zmerno togih primerih, ko `ode45` odpove.

- `ode23s`: Uporablja modificirano Rosenbrockovo metodo reda 2. Kadar ne zahtevamo velike natančnosti je lahko bolj učinkovita kot `ode15s` in deluje na naketerih zelo togih primerih, ko `ode15s` odpove.

- `ode23t`: Varianta trapezne metode. Uporabna za zmerno toge primere kadar ne zahtevamo velike natančnosti.

- `ode23tb`: Varianta implicitne dvostopenjske Runge-Kutta metode, primerna za zelo toge sisteme.

Način uporabe

Vse metode uporabljamo na enak način, zato je dovolj pogledati le uporabo npr. `ode45`.

- Osnovna uporaba je `[x,y] = ode45('f',xab,y0)`, kjer metoda `f` določa diferencialno enačbo $y' = f(x, y)$, $xab = [a\ b]$ je interval, na katerem rešujemo enačbo in y_0 je začetni pogoj $y(a) = y_0$. Kot rezultat dobimo vektorja izračunanih x in y.

- Dodatne opcije, s katerimi nastavimo npr. željeno natančnost, podamo v obliki `[x,y] = ode45('f',xab,y0,options)`. Pri tem moramo opcije `options` podati ali prej definirati s pomočjo funkcije `odeset`.

  Tako npr. z `options=odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-8)` povečamo relativno in absolutno natančnost (privzeti vrednosti sta `1e-3` in `1e-6`).