Analiza na mnogoterostih - zapiski predavanj

Franc Forstnerič*

21. januar 2011

*po zapiskih Andreja Poljanca

I.1 Uvod

Bo, ko bo.

I.2 Topološke mnogoterosti

Definicija. *Topološki prostor X se imenuje n-razsežna topološka mnogoterost brez roba ($n \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$), če je X*

(a) Hausdorffov,

(b) lokalno evklidski dimenzije n, tj.: $\forall p \in X\ \exists U^{odp} \ni x$ in homeomorfizem $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ na neko odprto množico v $\mathbb{R}^n$, in

(c) 2-števen (ima števno bazo topologije).

Naj bo $U \ni x \to \varphi(x) = y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Potem je (U, φ) lokalna karta na X in $\varphi^{-1} : U' = \varphi(U) \to U$ lokalna parametrizacija $U \subset X$.

Primer. *Navedli bomo nekaj osnovnih primerov mnogoterosti.*

1^o $X^{\text{odprta}} \subset \mathbb{R}^n$: inkluzija $i : X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ je lokalna (v tem primeru tudi kar globalna) karta.

2^o Sfera $S^n = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum\limits_{j=0}^{n} x_j^2 = 1\}$.
Za $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ definiramo

$$U_j^+ = \{x \in S^n : x_j > 0\}, \qquad U_j^- = \{x \in S^n : x_j < 0\}$$

in projekcijo

$$\pi_j^\pm : U_j^\pm \to \mathbb{R}^n$$

s predpisom

$$\pi_j^\pm(x_0, x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

(Strešica na x_j pomeni, da smo to spremenljivko izpustili.) Slika $\pi_j^\pm(U_j^\pm)$ je enotska krogla $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ s koordinatami $(x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n)$. Inverz te presilkave je

$$(\pi_j^\pm)^{-1} \colon B(0,1) \to U_j^\pm, \ \ (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_j, \pm\sqrt{1 - \|y\|^2}, y_{j+1}, \dots, y_n).$$

Ker je unija teh kart $\bigcup\limits_{j=0}^{n} U_j^\pm = S^n$, smo definirali na sferi kolekcijo lokalnih kart, ki pokrijejo S^n. Taka kolekcija se imenuje atlas na S^n.

Definicija. *Topološki atlas na X^n je vsaka kolekcija $\mathcal{U} = \{(U_j, \varphi_j) : j \in \mathcal{J}\}$, tako da je (U_j, φ_j) lokalna karta in velja $\bigcup\limits_{j \in \mathcal{J}} U_j = X$.*

Primer. *Nadaljujemo s primeri mnogoterosti in atlasov.*

3^o Sfera S^n s stereografsko projekcijo. Označimo $N = (0, \dots, 0, 1)$ in $S = (0, \dots, 0, -1)$. Dobimo dve karti:

$$\begin{array}{l} \phi\colon X \setminus \{N\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n \\ \psi\colon X \setminus \{S\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{R}^n \end{array}.$$

Če gledamo primer $n = 2$ in identificiramo $\mathbb{R}^2$ s kompleksno ravnino $\mathbb{C} = \{x + iy = z\}$, potem je prehodna preslikava med tema dvema kartama enaka

$$\psi \circ \phi^{-1}(z) = \frac{1}{\bar{z}}, \quad z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Če nadomestimo $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ s konjugirano karto $\bar{\psi} = \psi_1 - i\psi_2$, dobimo atlas s holomorfno prehodno preslikavo

$$\bar{\psi} \circ \phi^{-1}(z) = \frac{1}{z}.$$

Torej je karti $\phi, \bar{\psi}$ definirata kompeleksni atlas na S^2.

4^o Podmnogoterosti v evklidskem prostoru. Poseben primer: hiperploskve.
Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $f : D \to \mathbb{R}$ gladka funkcija (vsaj $\mathcal{C}^1$). Definiramo

$$X = \{x \in D : f(x) = 0\}$$

kot nivojnico f. Npr.

$$S^n = \{\sum_{j=0}^{n} x_j^2 - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Kdaj je X mnogoterost?
Za $\forall K^{\text{zaprta}} \subset \mathbb{R}^n$ obstaja gladka funkcija $f : \mathbb{R}^n \to R$, da je $\{f = 0\} = K$. Torej $f^{-1}(0)$ v splošnem ni mnogoterost.

Izrek (Izrek o implicitni funkciji). *Če je f funkcija razreda $\mathcal{C}^1$ v okolici točke $p \in \mathbb{R}^n$, $f(p) = 0$ in je $df_p \neq 0$ ($\Leftrightarrow \nabla f_{(p)} \neq 0$), potem lahko lokalno v okolici točke p množico $f^{-1}(0)$ predstavimo kot graf $\mathcal{C}^1$ funkcije $n-1$ spremenljivk.*

Konkretno: Če je $\frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \neq 0$, potem je v neki okolici p množica $\{f = 0\}$ graf

$$x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

kjer je g definirana v okolici $(p_1, \dots, p_{n-1})$. Torej nam projekcija $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$ da lokalno karto v okolici p na $X = \{f^{-1}(0)\}$. Preslikava

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

je $\mathcal{C}^1$ preslikava v okolici p. Njen diferencial je podan z Jacobijevo matriko

$$DF = \left[\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{array}\right]$$

Ker je $\det DF = \mathcal{J}F = \frac{\partial f}{\partial x_n} \neq 0 \Rightarrow F$, je F lokalno obrnljiva v točki p.
Naj bo U okolica p, $F(U \cap X) = F(U) \cap \{y_n = 0\}$. Definiramo projekcijo

$$\pi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad \pi(y) = (y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

Potem je $\pi \circ F : U \cap X \xrightarrow{\approx} V^{\text{odprta}} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ lokalna karta X.

Posledica. *Če je $df_p \neq 0$ $\forall p \in X = f^{-1}(0)$, potem je X topološka mnogoterost dimenzije $n-1$.*

Definicija. *Število $c \in \mathbb{R}$ je regularna vrednost funkcije f, če je $df_p \neq 0$ za $\forall p \in f^{-1}(c)$. Vrednost, ki ni regularna, je kritična.*

Opomba: c je kritična vrednost f natanko tedaj, ko nivojnica $f^{-1}(c)$ vsebuje vsaj eno kritično točko, to je točko, v kateri je $df_p = 0$.
V takih točkah nivojnica ni nujno mnogoterost.

Primer. Ogledamo si krivuljo

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 = y^3\}.$$

Ekvivalentno: $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Lahko jo parametriziramo s $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x(y) &= t^3 \\ y(t) &= t^2 \end{aligned}$$

Ni težko preveriti, da v okolici točke $(0, 0)$ C ni gladka mnogoterost. Je pa topološka mnogoterost.
Naloga: oglej si nivojnice $x^2 - y^3 = c$ za majhne c v okolici $(0, 0)$.

Izrek (Brouwer(1911))**.** *Odprta množica $\mathbb{R}^n$ ni homeomorfna nobeni odprti množici v $\mathbb{R}^k$ če $k \neq n$.*

Posledica. *Število n v definiciji n-dimenzionalne mnogoterosti je enolično določeno.*

Naj bo

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$$

zaprta zgornja polravnina.

Definicija. *Topološki prostor X je topološka n-dimenzionalna mnogoterost z robom, če ima vsaka točka $p \in X$ odprto okolico $U \subset X$ in obstaja homeomorfizem $\varphi : U \to U'$ na neko odprto množico $\mathbb{H}^n$.*

Klasificiramo točke $p \in X$:

1. primer:
$\varphi(p) \in \mathring{\mathbb{H}}^n = \{x \in \mathbb{H}^n \colon x_n > 0\}$.
U zmanjšamo, tako da $\varphi(U) \subset \mathring{\mathbb{H}}^n \Rightarrow \varphi(U)^{\text{odprta}} \subset \mathbb{R}^n$.
Taki točki pravimo notranja točka X.

2. primer: $\varphi(p) \in \partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{H} \colon x_n = 0\} \approx \mathbb{R}^{n-1}$, $\varphi_n(p) = 0$.
Taki točki pravimo robna točka mnogoterosti X.

Potrebno je videti, da je ta klasifikacija točk neodvisna od izbora homeomorfizma φ. Recimo, da je ψ drug homeomorfizem $\psi \colon V \xrightarrow{\approx} V'$. Lahko vzamemo kar $U = V$ (eno po potrebi zmanjšamo ali vzamemo $U \cap V$).

Izrek (Brouwer). *Če je U odprta podmnožica $\mathbb{R}^n$ in je $\theta\colon U \to \theta(U)$ homeomorfizem na neko podmnožico $\theta(U) \subset \mathbb{R}^n$, potem je $\theta(U)$ odprta v $\mathbb{R}^n$.*

Če je θ difeomorfizem, je to očitna posledica izreka o inverzni preslikavi.
Sedaj si ogledamo prehodno preslikavo

$$\theta\colon \varphi^{-1} \circ \psi\colon V' \xrightarrow{\approx} U'$$

Velja: θ preslika $V' \cap \mathring{\mathbb{H}}^n \to U' \cap \mathring{\mathbb{H}}^n$ ter $V' \cap \partial\mathbb{H}^n \to U' \cap \partial\mathbb{H}^n$.

Naj bo $p \in \partial X$ robna točka in (U, φ) lokalna karta.

$$U \cap \partial X \xrightarrow[\varphi|_{U\cap\partial X}]{\approx} U' \cap \underbrace{\partial\mathbb{H}^n}_{\approx\mathbb{R}^{n-1}}$$

$(U \cap \partial X, \varphi|_{U\cap\partial X})$ je lokalna karta na ∂X. Sledi, da je ∂X^n mnogoterost dimenzije $n-1$ (brez roba).

Primer. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ regularna vrednost f.
$X = \{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) \leq c\}$ je n-dimenzionalna mnogoterost z robom $\partial X = \{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) = c\}$.

Izrek (Topološke lastnosti mnogoterosti). *Vsaka topološka mnogoterost je:*

(a) lokalno povezana (vsaka točka ima bazo povezanih okolic),

(b) lokalno kompaktna (vsaka točka ima kompaktno okolico),

(c) števno kompaktna:

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$$

kjer so K_j kompaktne in velja $K_j \subset K_{j+1}$,

(d) normalna (vsak par disjunktnih zaprtih množic lahko ločimo z disjunktnima odprtima množicama; ker je Hausdorffov, sledi T_4),

(e) metrizabilna (obstaja metrika na X, ki inducira topologijo na X),

(f) parakompaktna (vsako odprto pokritje $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ ima neko lokalno končno finejše podpokritje, torej obstaja odprto pokritje $\mathcal{V} = \{V_\beta\}$ prostora X, tako da za $\forall\beta\ \exists\alpha$ tako da $V_\beta \subseteq U_\alpha$ in $\forall p \in X$ obstaja okolica $U \ni p$ v X, da je $U \cap V_\beta \neq 0$ za največ končno različnih β).

Dokaz. (a) in (b) očitno
(c) Sledi iz (b) ter 2-števnosti, saj ima X števno bazo odprtih množic $\{V_i\colon i \in \mathcal{I}\}$, tako da je $\overline{V}_i$ kompakt. $K_j = \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_j$. Na ta način dobimo $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = X$. V resnici lahko izberemo naraščajoče zaporedje kompaktov $K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset X$ tako, da je $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$. Takemu izčrpanju pravimo normalno.
(d) Vsak lokalno kompakten in števno kompakten Hausdorffov prostor je normalen.
(e) Posledica Urysohnovega metrizacijskega izreka (glej Kelley, General Topology, stran 125).

Izrek. *Vsak regularen prostor, ki je 2-števen, je homeomorfen nekemu podprostoru v kocki* $[0,1]^\infty$ *(števen kartezičen produkt intervalov* $[0,1]$*).*

Lahko je videti, da je

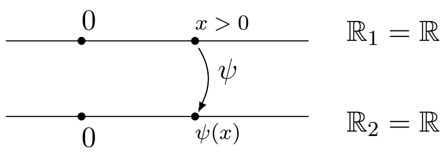
$$d((x_1,x_2,\ldots),(y_1,y_2,\ldots)) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}|x_j - y_j|$$

metrika na $[0,1]^\infty$. Zožitev te metrike na poljubno podmnožico $X \subset [0,1]^\infty$ je metrika na X.
(e) $\Rightarrow$ (f) Glej dokaz Kelley stran 160. $\square$

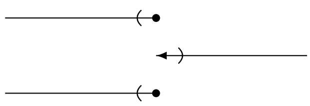
Opomba. 1^o Če iz definicije mnogoterosti izpustimo Hausdorffovo lastnost, dobimo t.i. ne-Hausdorffovo mnogoterost. To je topološki prostor, ki je

- lokalno evklidski
- 2-števen

Te primeri so zelo naravni v teoriji foliacij.
Eksplicitno: Naj bo $\psi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ poljubna zvezna strogo naraščajoča funkcija, $\psi(0) = 0$ (npr. $\psi(t) = t$).



Definiramo ekvivalenčno relacijo: če je $x \in \mathbb{R}_1$ in $y \in \mathbb{R}_2$, potem $x \sim y \overset{def}{\Leftrightarrow} x > 0 \wedge y = \psi(x)$. Ostali pari točk niso v relaciji. Dobimo ne-Hausdorffovo eno-dimenzionalno mnogoterost, ki jo opisuje naslednja slika:



Očitno je lokalno evklidski.

Drug naraven način, kako pridemo do ne-Hausdorffovih mnogoterosti: Prostor zarodkov gladkih funkcij. Naj bo $f\colon U \to \mathbb{R}$, $x \in U$, potem je $[f]_x$ ekvivalenčni razred parov (U,f): $(U,f) \sim (V,g) \Leftrightarrow f = g$ na neki okolici $x \in W \subset U \cap V$. Npr.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$$

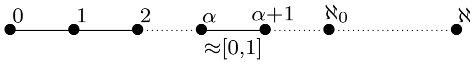
$$g(x) = 0$$

Opazimo $[f]_x = [g]_x \Leftrightarrow x < 0$.
Množica vseh zarodkov gladkih funkcij na X je ne-Hausdorffov lokalno evklidski prostor.
Zarodki realno-analitičnih ($\mathcal{C}^\omega$) funkcij nam dajo Hausdorffov lokalno evklidski prostor.

2^o Izpustili bi lahko tudi aksiom o 2-števnosti.

- Hausdorffov
- lokalno evklidski

Primer: "dolga premica"
Vzamemo vsa ordinalna števila do števila $\aleph$, (slednji predstavlja množico vseh realnih števil $\mathbb{R}$). Za vsako ordinalno število α obstaja njegov naslednik $\alpha + 1$. Med njima je interval, homeomorfen $[0, 1]$.



Unija vseh tako dobljenih intervalov je enodimenzionalna mnogoterost, ki ni 2-števna.

I.3 Definicija gladke mnogoterosti

I.3.1 Definicija gladke mnogoterosti brez roba

Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica. Potem je $\mathcal{C}^k(D)$ prostor vseh k-krat zvezno parcialno odvedljivih funkcij na D.

$$\mathcal{C}^0(D) \supset \mathcal{C}^1(D) \supset \mathcal{C}^2(D) \supset \ldots \supset \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^r(D) = \mathcal{C}^\infty(D)$$

$\mathcal{C}^\omega(D)$ je prostor realno analitičnih funkcij (lokalno predstavljive kot vsote potenčnih vrst $\rightsquigarrow$ Taylorjeva vrsta). Velja

$$\mathcal{C}^\omega(D) \subsetneq \mathcal{C}^\infty(D)$$

Naj bo $D \subset \mathbb{C}^n$. Potem označimo $\mathcal{O}(D) = \mathcal{H}(D)$ prostor vseh holomorfnih funkcij na D ($\mathcal{O}$ po japonskem matematiku Kiyoshi Oka). Če je $D \subset \mathbb{C}$, vemo kdaj je funkcija holomorfna. Naj bo f funkcija n kompleksnih spremenljivk. Potem je f holomorfna natanko tedaj, ko je f holomorfna v vsaki spremenljivki posebej. (Tej lastnosti pravimo tudi separatna holomorfnost. (Zveznost in diferenciabilnost funkcije je netrivialna posledica separatne holomorfnosti.)
Označimo $z_j = x_j + iy_j$ za $j = 1, \ldots, n$ in $f = u + iv$. Potem je diferenciabilna funkcija f holomorfna natanko tedaj, ko veljajo Cauchy-Riemannove enačbe za $j = 1, \ldots, n$:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j} \qquad \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial v}{\partial x_j}$$

ali na kratko

$$\overline{\partial} f = 0$$

Za $n = 1$ je ta operator definiran kot

$$\overline{\partial} f \overset{def}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Vsaka holomorfna funkcija v n spremenljivkah je lokalno vsota konvergentne potenčne vrste po spremenljivkah $z_1, \ldots, z_n$:

$$\sum_{k_j \geq 0} c_{k_1,\ldots,k_n}(z_1 - a_1)^{k_1}(z_2 - a_2)^{k_2} \ldots (z_n - a_n)^{k_n} \qquad \text{(nobenih členov oblike } \overline{z_j - a_j}\text{)}$$

Naj bo sedaj X n-dimenzionalna topološka mnogoterost in $\mathcal{U} = \{(U_j, \varphi_j) \colon j \in \mathcal{J}\}$ nek atlas na X.

Definicija. *Atlas $\mathcal{U} = \{(U_j, \varphi_j) \colon j \in \mathcal{J}\}$ je $\mathcal{C}^r$-atlas na X ($r \in \{0, 1, \ldots, \infty, \omega\}$), če je za vsak par indeksov $i, j \in \mathcal{J}$ prehodna preslikava $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} =: \varphi_{ij}$ $\mathcal{C}^r$ difeomorfizem na svoji domeni (kjer je definiran).*

1. primer: $U_i \cap U_j = \emptyset \Rightarrow$ ni pogoja (definicijsko območje prazno).

2. primer: $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Po definiciji mnogoterosti je φ_{ij} homeomorfizem:

$$\varphi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \colon \varphi_j(U_{ij}) \xrightarrow{\approx} \varphi_i(U_{ij}).$$

V $\mathcal{C}^r$ atlasu zahtevamo, da je φ_{ij} $\mathcal{C}^r$ difeomorfizem (φ_{ij} ter $\varphi_{ij}^{-1} = \varphi_{ji}$ sta razreda $\mathcal{C}^r$). Pravimo tudi, da sta karti (U_i, φ_i), (U_j, φ_j) $\mathcal{C}^r$-kompatibilni.
Očitno velja:

- $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}$ na U_i
- $\varphi_{ij} \circ \varphi_{ji} = \mathrm{Id}$ (kjer definirano) $\Leftrightarrow \varphi_{ij}^{-1} = \varphi_{ji}$
- $\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ki} = \mathrm{Id}$ (kjer definirano) $\Leftrightarrow \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik}$

Kolekcija difeomorfizmov $\{\varphi_{ij}\}$ s temi lastnostmi se imenuje 1-kocikel difeomorfizmov na pokritju $\{U_j\}$.

Definicija. *$\mathcal{C}^r$ atlasa $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ ter $\mathcal{V} = \{(V_j, \psi_j)\}$ na topološki mnogoterosti X sta med seboj $\mathcal{C}^r$ ekvivalentna (ali $\mathcal{C}^r$ kompatibilna), če je $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ spet $\mathcal{C}^r$ atlas.*

Ekvivalentno: vsaka karta $(U_i, \varphi_i) \in \mathcal{U}$ je kompatibilna z vsako karto $(V_j, \psi_j) \in \mathcal{V}$.
Očitno je $\mathcal{C}^r$-ekvivalenca ekvivalenčna relacija na množici vseh topoloških atlasov na dani mnogoterosti X.

Definicija. *$\mathcal{C}^r$ struktura na X (ali struktura $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti na topološki mnogoterosti X) je določena z izborom ekvivalenčnega razreda $\mathcal{C}^r$-atlasa.*

Ekvivalentno: $\mathcal{C}^r$ struktura na X je določena z maksimalnim $\mathcal{C}^r$-atlasom (unija vseh $\mathcal{C}^r$-atlasov v nekem ekvivalenčnem razredu).

I.3.2 Definicija gladke mnogoterosti z robom

Isto definicijo ponovimo za mnogoterost z robom. V tem primeru je $\varphi_{\alpha\beta}$ difeomorfizem med odprtimi podmnožicami v $\mathbb{H}^n = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \colon y_n \geq 0\}$. Iz izreka o inverzni preslikavi sledi, da je difeomorfizem odprta preslikava, to je, slika odprte množice v $\mathbb{R}^n$ je spet odprta množica v $\mathbb{R}^n$. Torej preslika $\varphi_{\alpha\beta}$ notranjost $\mathring{V} = V \cap \{y_n > 0\}$ v $\varphi_{\alpha\beta}(V) \cap \{y_n > 0\}$ ter $V \cap \{y_n = 0\}$ v $\varphi_{\alpha\beta}(V) \cap \{y_n = 0\}$.

Naj bo $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ $\mathcal{C}^r$-atlas na mnogoterosti z robom $(X^n, \partial X)$.
Kolekcija vseh kart $(U_\alpha \cap \partial X, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial X})$

$$\varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial X} \colon \underbrace{U_\alpha \cap \partial X}_{\text{odprta v } \partial X} \to \underbrace{\varphi_\alpha(U_\alpha)}_{\subset \mathbb{H}^n} \cap \underbrace{\{y_n = 0\}}_{= \mathbb{R}^{n-1}}$$

je očitno $\mathcal{C}^r$ atlas na ∂X, ki definira na ∂X strukturo $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti dimenzije $n - 1$.

I.3.3 Kompleksna mnogoterost

Označimo koordinate na $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ z

$$\mathbb{R}^{2n} \ni (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \rightsquigarrow (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Kompleksna struktura na topološki mnogoterosti X^{2n} je podana z atlasom

$$\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha); \alpha \in \mathcal{I}\}$$

$$\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to U'_\alpha \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n,$$

tako da so vse prehodne preslikave

$$\varphi_{\alpha\beta} \colon \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}) \to \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$$

biholomorfne (to je bijektivne, holomorfne in s holomorfnim inverzom).

Definicija. *Kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije n je topološka mnogoterost X realne dimenzije $2n$ skupaj z izborom kompleksne strukture (ekvivalentno, skupaj z izborom ekvivalenčnega razreda kompleksnih atlasov na X).*

Kompleksno dimenzijo označimo z $\dim_{\mathbb{C}} X$. Velja torej $\dim_{\mathbb{R}} X = 2 \dim_{\mathbb{C}} X$.
Očitni primeri holomorfnih funkcij na podmnožici v $\mathbb{C}^n$ so polinomi v $z_1, \ldots, z_n$ (holomorfni polinomi) ter racionalne funkcije $\frac{P}{Q}$, kjer sta P, Q polinoma (slednja je holomorfna na množici $Q \neq 0$). Kompleksna mnogoterost z atlasom, ki ima za prehodne preslikave racionalne funkcije, se imenuje *kompleksno algebraična mnogoterost*.

I.4 Primeri gladkih in kompleksnih mnogoterosti

I.4.1 Riemannove ploskve

Naj bo X kompleksna mnogoterost z $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$. Kompleksne mnogoterosti dimenzije 1 se imenujejo Riemannove ploskve. To so npr. domene v $\mathbb{C}$, Riemannova sfera: $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \approx S^2$ (topološko 2-sfera). Kompleksen atlas na 2-sferi $S^2 = S$:

$$\text{atlas na } S^2 \begin{cases} U = S \setminus \{(0,0,1)\} \underset{\approx}{\xrightarrow{\varphi}} \mathbb{R}^2 = \mathbb{C} \\ V = S \setminus \{(0,0,-1)\} \underset{\approx}{\xrightarrow{\psi}} \mathbb{C} \end{cases} \quad \text{(stereografska projekcija)}$$

ψ preslika severni pol $(0,0,1)$ v $(0,0)$
$\psi \colon S \setminus \{(0,0,1), (0,0,-1)\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
φ preslika južni pol $(0,0,-1)$ v $(0,0)$
$\varphi \colon S \setminus \{(0,0,1), (0,0,-1)\} \xrightarrow{\approx} \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Prehodna preslikava je $\overline{\varphi} \circ \psi^{-1}$ in velja

$$(\overline{\varphi} \circ \psi^{-1})(\zeta) = \frac{1}{\zeta} \quad \text{za } \zeta = x + iy \in \mathbb{C}^*.$$

To je biholomorfna preslikava $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$.
S s to strukturo se imenuje Riemannova sfera, ali tudi $\mathbb{CP}^1$ - enodimenzionalna kompleksna projektivna ravnina.

$$S = (\mathbb{C} \sqcup \mathbb{C})/_{\zeta \sim \frac{1}{\zeta}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Naloga. Naj bo $\{(U,\varphi),(V,\psi)\}$ atlas na n-sferi $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (enotna sfera), definiran s stereografsko projekcijo. Pokaži, da ta atlas definira isto gladko (realno-analitično) strukturo kot atlas $\{(U_j^{\pm},\varphi_j^{\pm}), j=0,\dots,n\}$, kjer so $U_j^{\pm}$ hemisfere in

$$(\varphi_j^{+})^{-1}\colon (y_1,\dots,y_n) \mapsto (y_1,\dots,y_j,\sqrt{1-|y|^2},\dots,y_n)$$

$$\varphi_k^{\pm}\circ(\varphi_j^{\pm})^{-1}\colon (y_1,\dots,y_n) \mapsto (y_1,\dots,\pm\sqrt{1-|y|^2},\dots,y_n) \text{ (ena koordinata izpuščena)}$$

I.4.2 Kartezični produkt gladkih mnogoterosti

Če sta X^n in Y^m mnogoterosti, je $X\times Y$ mnogoterost dimenzije $n+m$. Naj bo $\mathcal{U}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ $\mathcal{C}^r$-atlas na X in $\mathcal{V}=\{(V_\beta,\psi_\beta)\}$ $\mathcal{C}^r$-atlas na Y. Atlas na $X\times Y$ je potem $\{(U_\alpha\times V_\beta,\varphi_\alpha\times\psi_\beta)\}$, kjer je $\varphi_\alpha\times\psi_\beta$ definirana na naslednji način: če je $x\in U_\alpha$ in $y\in V_\beta$, potem

$$(\varphi_\alpha\times\psi_\beta)(x,y)=(\underbrace{\varphi_\alpha(x)}_{=u},\underbrace{\psi_\beta(y)}_{=v})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^{n+m}.$$

Prehodne preslikave so oblike $(u,v)\mapsto(\varphi_{\alpha\alpha'}(u),\psi_{\beta\beta'}(v))$, torej so $\mathcal{C}^r$ difeomorfizmi. Tak atlas na $X\times Y$ se imenuje produktni atlas. Kartezični produkt $X\times Y$ dveh $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti, opremljen s produktnim atlasom, je torej $\mathcal{C}^r$ mnogoterost.
Enako vidimo, da je produkt $X\times Y$ dveh kompleksnih mnogoterosti spet kompleksna mnogoterost in velja $\dim_{\mathbb{C}} X\times Y=\dim_{\mathbb{C}} X+\dim_{\mathbb{C}} Y$.

Primer. $\underbrace{S^1\times\ldots\times S^1}_{n}$ je n-dim torus.

I.4.3 Kvocientne mnogoterosti

Motivacija: $\mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}\approx S^1$ (krožnica):

$$\begin{aligned}\mathbb{R}&\to S^1\subset\mathbb{C}\\ t&\mapsto e^{2\pi it}\end{aligned}$$

Naj bo X topološki prostor in $\sim$ ekvivalenčna relacija na X. Potem se $X/_\sim$ imenuje kvocientni prostor.

$$\begin{array}{cc} X & \supset \pi^{-1}(U) \\ \pi\downarrow & \downarrow\pi \\ X/_\sim & \supset U^{odprta}\end{array}$$

Topologija na $X/_\sim$ je definirana na naslednji način: $U\subset X/_\sim$ je odprta $\Leftrightarrow$ $\pi^{-1}(U)\subset X$ je odprta. To je najmočnejša topologija na $X/_\sim$, da je π zvezna.
Velja: kvocientna projekcija π je odprta $\Leftrightarrow$ $\sim$ je odprta relacija $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ $U^{odprta}\subset X \Rightarrow \{x\in X: x\sim y \text{ za nek } y\in U\}=\pi^{-1}(\pi(U))$ (saturacija množice U) je odprta.

Trditev. *Naj bo X Hausdorffov. Potem je $X/_\sim$ Hausdorffov natanko tedaj, ko je $\sim$ zaprta relacija, to je*

$$\mathcal{R}=\{(x,y)\in X\times X\colon x\sim y\} \text{ (graf } \sim)$$

je zaprta množica v $X\times X$.

Dokaz. *Vaje.* □

V nadaljevanju gledamo ekvivalenčno relacijo $\sim$ na mnogoterosti X, ki je hkrati odprta in zaprta. Torej je kvocientna projekcija $\pi\colon X \to X/_\sim$ odprta preslikava ter je $X/_\sim$ Hausdorffov 2-števen topološki prostor. Zanimali nas bodo primeri, ko je $X/\sim$ spet mnogoterost. Najprej si oglejmo nekaj primerov.

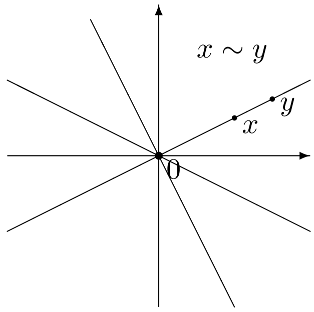
I.4.4 Projektivni prostori

$$\mathbb{RP}^n \text{ realni projektivni prostor dimenzije } n$$
$$\mathbb{CP}^n \text{ kompleksni projektivni prostor dimenzije } \dim_{\mathbb{C}} = n$$

Splošneje: če je V nek končnorazsežen realen ali kompleksen vektorski prostor, definiramo njegovo projektivizacijo $\mathbb{P}(V)$ kot množico vseh 1-dim vektorskih podprostorov v V.

$$\begin{aligned}\mathbb{RP}^n &= \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) = \text{ množica vseh realnih premic (realnih enorazsežnih podprostorov) v } \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathbb{CP}^n &= \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) = \text{ množica vseh kompleksnih premic v } \mathbb{C}^{n+1}\end{aligned}.$$

Na $\mathbb{R}^{n+1}_* = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ definiramo ekvivalenčno relacijo $\sim$:
$x = (x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) \Leftrightarrow x$ in y sta kolinearna $\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$, da je $y = tx$



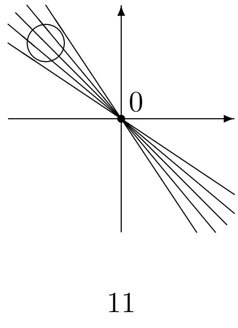
$\sim$ je ekvivalenčna relacija, dobimo:

$$\begin{array}{c}\mathbb{R}^{n+1} \\ \downarrow \pi \\ \mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1}_*/_\sim\end{array}$$

$\sim$ je odprta: naj bo $U^{odprta} \subset \mathbb{R}^{n+1}_*$. Potem je

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_*} tU \quad \text{(stožec nad } U)$$

odprta.



Graf $\sim$ je množica

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}_*^{n+1} \times \mathbb{R}_*^{n+1} : \sum_{j,k=0,\ldots,n} |x_j y_k - x_k y_j|^2 = 0\}$$

in je zaprta (ker ničla zvezne funkcije). Torej je $\mathbb{RP}^n$ Hausdorffov.

Kompaktnost: S^n naj bo enotna sfera v $\mathbb{R}^{n+1}$. Potem lahko definiramo $\mathbb{RP}^n$ kot $\mathbb{RP}^n = \pi(S^n) = S^n/_{x\sim -x}$, torej je $\mathbb{RP}^n$ kompakten.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[d, "\pi"', "\text{2-listna projekcija}"] \\ \mathbb{RP}^n \end{tikzcd}$$

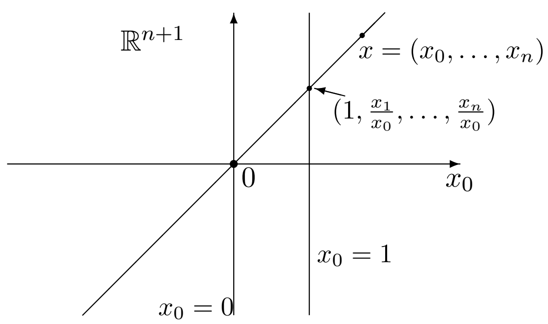
Analogni zaključki za $\mathbb{CP}^n$:

$$\begin{array}{ccll} S^1 & \hookrightarrow & S^{2n+1} & \subset \mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2} \\ & & \downarrow \pi & \text{(Hopfova fibracija)} \\ & & \mathbb{CP}^n & \text{realno-analitičen sveženj z vlaknom } S^1 \end{array}$$

Če $n = 1$:

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r, hook] & S^3 \arrow[d] \\ & \mathbb{CP}^1 = S^2 \end{tikzcd}$$

Atlas na $\mathbb{RP}^n$ ter $\mathbb{CP}^n$:



$$x \in V_j = \{(x_0, \ldots, x_n) \colon x_j \neq 0\} \xrightarrow{\pi} U_j \subset \mathbb{RP}^n$$

$$\pi(x) = [x] \in U_j \text{ (ekvivalenčni razred od } x)$$

Definiramo $\varphi_j \colon U_j \to \mathbb{R}^n$ kot

$$\varphi_j([x]) = \varphi_j([x_0 \colon x_1 \colon \ldots \colon x_n]) \overset{def}{=} \left(\frac{x_0}{x_j}, \ldots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \ldots, \frac{x_n}{x_j}\right)$$

φ_j je dobro definirana:

$$\begin{aligned} [x_0 \colon \ldots \colon x_n] = [y_0 \colon \ldots \colon y_n] &\Leftrightarrow y_j = t x_j \ \forall j = 0, \ldots, n \, \forall t \in \mathbb{R}_* \\ &\Rightarrow \tfrac{y_k}{y_j} = \tfrac{t x_k}{t x_j} = \tfrac{x_k}{x_j} \ \forall j \\ &\Rightarrow \varphi_j([x_0 \colon \ldots \colon x_n]) = \varphi_j([y_0 \colon \ldots \colon y_n]) \end{aligned}$$

Preveri, da je to $\mathcal{C}^\omega$-atlas na $\mathbb{RP}^n$ in holomorfen atlas na $\mathbb{CP}^n$.

$\mathbb{P}^n$ vsebuje veliko linearno vloženih prostorov $\mathbb{P}^k$, $1 \leq k < n$ (to velja za realne in kompleksne). Izberemo nek $(k+1)$-dimenzionalen linearen podprostor $\Sigma \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{n+1}_* \arrow[d] & \Sigma \setminus \{0\} \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
\mathbb{CP}^n & \mathbb{P}(\Sigma) \approx \mathbb{CP}^k \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

Kompleksne premice v Σ so točke v $\mathbb{P}(\Sigma) \approx \mathbb{CP}^k$.

Če je $k = n-1$: Σ je hiperravnina v $\mathbb{C}^{n+1}$, podana z eno linearno enačbo: $a_0 z_0 + \ldots + a_n z_n = 0$ (vsaj en $a_j \neq 0$). Prirejena projektivna hiperravnina v $\mathbb{CP}^n$ je

$$\mathbb{P}(\Sigma) = \{[z_0\colon z_1\colon \ldots : z_n] \in \mathbb{CP}^n\colon \sum_{j=0}^n a_j z_j = 0\}.$$

Opomba. *Definicija je dobra, t.j., neodvisna od predstavnika ekvivalenčnega razreda, saj se multiplikativen faktor $t \in \mathbb{C}_*$ krajša.*

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{C}^n & \approx & \{z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{CP}^n \\
 & \approx & \{[z_0\colon z_1\colon \ldots : z_n] : z_0 \neq 0\} \\
 & & \quad\quad\downarrow \\
 & & \left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}\right) \quad \in \mathbb{C}^n \\
 & & \quad\quad || \\
 & & (\zeta_1, \ldots, z_n) \quad \text{koordinate na } \mathbb{C}^n
\end{array}$$

Sedaj bomo na preprostem primeru opisali pojem *projektivnega zaprtja.* Vzemimo neko afino linearno hiperravnino $L \subset \mathbb{C}^n$:

$$L\colon \quad \sum_{j+1}^n a_j \zeta_j + a_0 = 0$$

Kaj je $\overline{L} \subset \mathbb{CP}^n$? Homogeniziramo oz. projektiviziramo: pišemo $\zeta_j = \frac{z_j}{z_0}$, kjer so $[z_0\colon \ldots : z_n]$ homogene koordinate na $\mathbb{CP}^n$. Vstavimo v enačbo za L:

$$\begin{array}{rl}
 & \sum_{j=1}^n a_j \frac{z_j}{z_0} + a_0 = 0 \qquad | \cdot z_0 \\
\overline{L}\colon & \sum_{j=1}^n a_j z_j + a_0 z_0 = \sum_{j=0}^n a_j z_j = 0 \quad \text{projektivna hiperravnina v } \mathbb{CP}^n
\end{array}$$

"Točke v ∞" so

$$\overline{L} \cap \underbrace{\{z_0 = 0\}}_{\approx \mathbb{CP}^{n-1}} = \{[0\colon z_1\colon \ldots : z_n]\colon \sum_{j=1}^n a_j z_j = 0\} \qquad \text{hiperravnina v } \mathbb{CP}^{n-1} \approx \mathbb{CP}^{n-2}$$

Posplošitev: če je $P(z_0, \dots, z_n) \not\equiv 0$ homogen polinom stopnje $d \in \mathbb{N}$, potem je množica

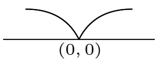
$$A_P = \{[z_0 \colon \dots \colon z_n] \in \mathbb{CP}^n \colon P(z_0, \dots, z_n) = 0\}$$

dobro definirana. A_P se imenuje projektivna algebraična hiperploskev stopnje d.

Lahko gledamo tudi množice, definirane z več homogenimi polinomskimi enačbami:

$$A_{P_1} \cap A_{P_2} \cap \dots \cap A_{P_k} \qquad \text{projektivna algebraična podmnožica v } \mathbb{CP}^n$$

Primer. *Naj bo $C = \{x^2 = y^3 \colon x, y \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$ kompleksna krivulja (afino algebraična).*

Presek z $\mathbb{R}^2$ ima singularnost v $(0,0)$: 

Projektiviziramo: $\overline{C} \subset \mathbb{CP}^2$

$$x = \tfrac{z}{\zeta}, \qquad y = \tfrac{w}{\zeta} \quad (\zeta \neq 0, z, w \in \mathbb{C})$$
$$\left(\tfrac{z}{\zeta}\right)^2 = \left(\tfrac{w}{\zeta}\right)^3$$
$$z^2\zeta = w^3 \qquad \textit{homogena enačba}$$

$$\overline{C} = \{[\zeta \colon z \colon w] \in \mathbb{CP}^2 \colon z^2\zeta = w^3\}$$
$$\overline{C} \cap \underbrace{\{\zeta = 0\}}_{\approx \mathbb{CP}^1} = \{[0 \colon z \colon 0]\} = \{[0 \colon 1 \colon 0]\}$$

Lahko vidimo, da je presečno število krivulje $\overline{C}$ s premico v neskončnosti $\Lambda = \{\zeta = 0\}$ v točki $[0 \colon 1 \colon 0]$ enako 3 (pravimo tudi, da je to trojna presečna točka).

Opomba. *Lokalno presečno število* dveh kompleksnih krivulj v poljubni kompleksni ploskvi izračunamo tako, da lokalno definicijsko funkcijo ene krivulje (v našem primeru npr. funkcijo ζ, ki definira projektivno premico $\{\zeta = 0\} = \Lambda$) zožimo na drugo krivuljo (v našem primeru $\overline{C}$) in jo izrazimo v lokalni karti na drugi krivulji, v kateri presečni točki ustreza izhodišče. Presečno število je tedaj red ničle zožene funkcije v izhodišču.
V našem primeru je primerna lokalna koordinata na $\overline{C}$ funkcija w (saj presečni točki ustreza $w = 0$), zvezo med ζ in w (v lokalni karti $\{z = 1\}$ na $\mathbb{CP}^2$) pa nam podaja enačba $\zeta = w^3$. Red ničle funkcije ζ pri $w = 0$ je enako 3 in to je presečno število med $\overline{C}$ in Λ v točki $[0 \colon 1 \colon 0]$. Iz definicije sledi, da je presečno število dveh kompleksnih krivulj vselej pozitivno.

Globalno presečno število dveh krivulj je definirano kot vsota lokalnih presečnih števil v vseh presečnih točkah. Za krivulje v kompaktni komleksni ploskvi (kot npr. $\mathbb{CP}^2$) je to vselej nenegativno (končno) celo število. Krivulje v odprtih ploskvah (kot npr. $\mathbb{C}^2$) pa se lahko sekajo v števni diskretni množici točk in v tem primeru globalnega presečnega števila ni mogoče smiselno definirati.

Naloga. *Dokaži, da je presečno število vsake kompleksne krivulje stopnje d v $\mathbb{CP}^2$ s katerokoli projektivno premico $\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^2$ enako d, torej stopnji krivulje.*

Konstrukcijo projektivizacije v zgornjem primeru lahko posplošimo takole. Če je

$$L = \{(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n \colon P(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = 0\},$$

kjer je $P(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ polinom stopnje d, ki ni nujno homogen, pišemo $\zeta_j = \frac{z_j}{z_0}$ in vstavimo v P:

$$\widetilde{P}(z_0, \ldots, z_n) = z_0^d P\left(\frac{z_j}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}\right) = 0$$

Dobljeni homogen polinom $\widetilde{P}$ stopnje d se imenuje *homogenizacija* polinoma P. Potem je množica

$$\overline{L} = \{[z_0 \colon \ldots \colon z_n] \in \mathbb{CP}^n \colon \widetilde{P}(z_0, \ldots, z_n) = 0\}$$

ravno zaprtje množice L v $\mathbb{CP}^n$.

I.5 Gladke funkcije in preslikave

Naj bo X $\mathcal{C}^r$-mnogoterost, $r \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty, \omega, \mathcal{O}\}$, ter $f \colon X \xrightarrow{\text{zvezna}} \mathbb{R}$ (ali pa $f \colon X \to \mathbb{C}$ v primeru, da je X kompleksna mnogoterost).

Definicija. *Zvezna funkcija f na mnogoterosti X je gladka razreda $\mathcal{C}^r$ (realno analitična v primeru $r = \omega$; holomorfna v primeru $r = \mathcal{O}$) v točki $p \in X$, če je za neko lokalno karto (U, φ) na X (iz atlasa, ki določa dano $\mathcal{C}^r$ strukturo na X), $p \in U$, funkcija*

$$f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$$

gladka razreda $\mathcal{C}^r$ v neki okolici točke $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$. Funkcija f je razreda $\mathcal{C}^r$ na X, če je $\mathcal{C}^r$ v vsaki točki $p \in X$.

$$\begin{tikzcd}
p \in U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R} \\
\varphi(p) \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \arrow[ur, "f \circ \varphi^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Lema. *Definicija je neodvisna od izbire lokalne karte v danem $\mathcal{C}^r$ atlasu.*

Dokaz. Naj bo (V, ψ) neka druga lokalna karta na X, $p \in V$.

$$\begin{tikzcd}
\psi(p) \in \mathbb{R}^n \arrow[dr, "f \circ \psi^{-1}"] \arrow[dd, bend right=60, "\varphi \circ \psi^{-1}"'] & \\
p \arrow[u, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\
\varphi(p) \in \mathbb{R}^n \arrow[ur, "f \circ \varphi^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$f\psi^{-1} = f\varphi^{-1}\varphi\psi^{-1} = (f\varphi^{-1}) \circ \underbrace{(\varphi \circ \psi^{-1})}_{\substack{\text{prehodna preslikava,} \\ \mathcal{C}^r \text{ difeomorfizem}}}$$

Če je $f \circ \varphi^{-1}$ razreda $\mathcal{C}^r$, je tudi $f \circ \psi^{-1} = (f\varphi^{-1})(\varphi\psi^{-1})$ razreda $\mathcal{C}^r$, saj je kompozicija $\mathcal{C}^r$-preslikav med Evklidskimi prostori spet $\mathcal{C}^r$-preslikava. (Slednje lahko vidimo z uporabo verižnega pravila). Isti sklep velja v obratni smeri. $\square$

Definicijo posplošimo za preslikave.

Definicija. *Naj bosta X, Y dve $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti. Zvezna preslikava $f\colon X \to Y$ je gladka razreda $\mathcal{C}^r$ v točki $p \in X$, če obstajata lokalni karti (U, φ) na X ter (V, ψ) na Y, tako da velja $p \in U$, $f(p) \in V$ in je preslikava $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ razreda $\mathcal{C}^r$ v neki okolici točke $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$. Preslikava je razreda $\mathcal{C}^r$ (na X), če je razreda $\mathcal{C}^r$ v vsaki točki iz X. Preslikava f je glada razreda $\mathcal{C}^r$ na X, če je $\mathcal{C}^r$ v vsaki točki.*

$$\begin{tikzcd} p \in U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & f(p) \in V \arrow[d, "\psi"] \\ \varphi(p) \in \mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi f \varphi^{-1}"] & \psi(f(p)) \in \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

Lema. *Tudi ta definicija je neodvisna od izbire lokalnih kart na X oz. na Y.*

Dokaz. Naj bo (U', φ') neka druga karta na X, $p \in U'$, ter (V', ψ') neka druga karta na Y, $f(p) \in V'$. Potem velja:

$$\psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1} = \psi'\psi^{-1}\psi f \varphi^{-1}\varphi(\varphi')^{-1} = \underbrace{(\psi'\psi^{-1})}_{\substack{\text{prehodna preslikava na } Y, \\ \mathcal{C}^r \text{ difeomorfizem}}} (\psi f \varphi^{-1}) \underbrace{(\varphi(\varphi')^{-1})}_{\substack{\text{prehodna preslikava na } X, \\ \mathcal{C}^r \text{ difeomorfizem}}}$$

Sledi: če je $\psi f \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^r$, je tudi $\psi' f (\varphi')^{-1} \in \mathcal{C}^r$ in obratno. □

Kategorija $\mathcal{C}^r$ $(r \in \{0, 1, \ldots, \infty, \omega)$:

- objekti: $\mathcal{C}^r$-mnogoterosti
- morfizmi: $\mathcal{C}^r$-preslikave

Kategorija $\mathcal{O}$:

- objekti: kompleksne mnogoterosti
- morfizmi: holomorfne preslikave

Opomba. *Če sta X in Y $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti, sta avtomatično tudi $\mathcal{C}^k$ mnotogoterosti za vsak $k < r$. Torej lahko govorimo o $\mathcal{C}^k$ preslikavah $X \to Y$ za vsak $k \leq r$. Ne moremo pa smiselno definirati pojma $\mathcal{C}^k$-preslikave za $k > r$.*

$\mathcal{C}^r(X, Y)$ je množica vseh $\mathcal{C}^r$-preslikav $X \to Y$.
$\mathcal{C}^r(X) \overset{def}{=} \mathcal{C}^r(X, \mathbb{R})$ je množica vseh $\mathcal{C}^r$ funkcij na X (to je ∞-dimenzionalen vektorski prostor).

Opomba. *Iz definicij sledi, da je vsaka lokalna karta (U, φ) na neki $\mathcal{C}^r$-mnogoterosti X $\mathcal{C}^r$-preslikava $U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n$.*

Definicija. *$\mathcal{C}^r$-difeomorfizem $f : X \to Y$ je bijektivna preslikava (homeomorfizem) med $\mathcal{C}^r$-mnogoterostima, ki je $\mathcal{C}^r$ ter je f^{-1} tudi $\mathcal{C}^r$.*

Trditev. *Kompozicija gladkih $\mathcal{C}^r$-preslikav nad mnogoterostmi je spet $\mathcal{C}^r$-preslikava.*

Dokaz. Ideja:

$$
\begin{tikzcd}
p \in U \subset X \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & & f(p) \in V \subset Y \arrow[rr, bend left, "g"] \arrow[d, "\psi"] & & g(f(p)) \in W \subset Z \arrow[d, "\theta"] \\
0 \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \arrow[rr, bend left, "\psi f \varphi^{-1}", "\mathcal{C}^r"'] \arrow[rrrr, bend right, "\mathcal{C}^r", "(\theta g \psi^{-1})(\psi f \varphi^{-1}) = \theta(gf)\varphi^{-1}"'] & & 0 \in \psi(V) \subset \mathbb{R}^n \arrow[rr, bend left, "\theta g \psi^{-1}", "\mathcal{C}^r"'] & & 0 \in \theta(W) \subset \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

Dobimo ravno $g \circ f$ v paru lokalnih kart (U, φ) na X in (W, θ) na Z. Ker je ta $\mathcal{C}^r$, sledi po definiciji, da je $g \circ f$ tudi $\mathcal{C}^r$. $\square$

Primer. Navedli bomo nekaj primerov gladkih preslikav.

1^o Preslikave med evklidskimi prostori: običajna definicija gladkosti.

2^o Preslikave v projektivne prostore:

$$
\begin{array}{ccll}
\mathbb{R}^n \supset D & \xrightarrow{f} & \mathbb{RP}^N & \quad \text{koordinate } [y_0 \colon \dots \colon y_N] \\
x & \mapsto & [f_0(x) \colon \dots \colon f_N(x)] &
\end{array}
$$

Ta preslikava je dobro definirana na množici $\{x \in D \colon f_j(x) \neq 0 \text{ za vsaj en } j\}$. Predpostavimo, da je ta množica kar eneka D.
Kdaj je f razreda $\mathcal{C}^r$? Preverimo v lokalnih kartah $\mathbb{RP}^N$. Recimo,da je $f_j(a) \neq 0$ za nek $a \in D$. Torej velja isto v neki okolici $a \in U \subset D$. Sedaj vzamemo na $\mathbb{RP}^N$ lokalno karto $[y_0 \colon \dots \colon y_j \colon \dots \colon y_N] \mapsto \left(\frac{y_0}{y_j}, \dots, \frac{y_N}{y_j}\right) \in \mathbb{R}^n$ (izpustimo $\frac{y_j}{y_j}$):

$$
(\psi \circ f)(x) = \left(\frac{f_0(x)}{f_j(x)}, \dots, \frac{f_N(x)}{f_j(x)}\right) \in \mathbb{R}^N, \qquad f_j(x) \neq 0 \text{ za } x \in U
$$

Odtod vidimo: Če so vse komponente f_j $\mathcal{C}^r$-funkcije na D, potem je $f \colon D \to \mathbb{RP}^N$ $\mathcal{C}^r$-preslikava.

Podobno vidimo, da je preslikava $f \colon D \to \mathbb{CP}^N$, definiranan na neki domeni $D \subset \mathbb{C}^n$, holomorfna preslikava v $\mathbb{CP}^N$, če so vse njene komponente holomorfne funkcije in je v vsaki točki vsaj ena od komponent različna od nič.

3^o Naj bo D domena v $\mathbb{C}$. *Meromorfna funkcija* na D je holomorfna funkcija $f \colon D \setminus \{a_j\} \to \mathbb{C}$ na komplementu neke diskretne množice točk $\{a_j\} \subset D$, ki ima v vsaki točki a_j pol (ali odpravljivo singularnost). Lokalno v okolici pola a_j:

$$
f(z) = \frac{g(z)}{(z - a_j)^{n_j}}, \qquad g \text{ holomorfna v okolici točke } a_j,\ n_j \in \mathbb{N}
$$

V polu:

$$
\lim_{z \to a_j} |f(z)| = \infty
$$

Meromorfni funkciji f priredimo preslikavo $\tilde{f}\colon D \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{CP}^1$ (kompaktifikacija z eno točko, Riemannova sfera) s predpisom

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{če } z \neq a_j \ \forall j \\ \infty & \text{če } z = a_j \text{ za nek } j \end{cases}$$

$\tilde{f}$ je zvezna preslikava $D \to \mathbb{CP}^1$. Trdimo, da je $\tilde{f}$ dejansko holomorfna preslikava.

$$\mathbb{CP}^1 = \{[z_0\colon z_1]\colon z_0, z_1 \text{ nista obe } 0\}, \qquad \text{karti: } \begin{tikzcd} {[z_0\colon z_1]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \frac{z_1}{z_0} = \zeta \arrow[d, "\frac{1}{\zeta}"] \\ & \frac{z_0}{z_1} \end{tikzcd}$$

Lahko zapišemo

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} [1\colon f(z)] & z \neq a_j \ \forall j \\ [0\colon 1] & z = a_j \text{ za nek } j \end{cases}$$

V okolici a_j:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a_j)^{n_j}}, \qquad g(a_j) \neq 0,\ g \text{ holomorfna}$$

$$\Longrightarrow \tilde{f}(z) = \left[1\colon \frac{g(z)}{(z-a_j)^{n_j}}\right] = [(z-a_j)^{n_j}\colon g(z)] \in \mathbb{CP}^1.$$

Sedaj pogledamo $\tilde{f}$ v drugi karti ψ:

$$(\psi \circ \tilde{f})(z) = \frac{(z-a_j)^{n_j}}{g(z)} \quad \text{holomorfna v okolici točke } a_j.$$

V točki $z = a_j$ ima $\psi \circ \tilde{f}$ ničlo reda n_j.

Opomba: če je f meromorfna na D, potem $f = \frac{g}{h}$, kjer sta g in h holomorfni. Potem

$$\tilde{f}(z) = \left[1\colon \frac{g(z)}{h(z)}\right] = [h(z)\colon g(z)] \in \mathbb{CP}^1$$

Velja tudi obratno: vsaka holomorfna preslikava $D \subset \mathbb{C} \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{CP}^1$, $\tilde{f} \not\equiv \infty$, definira meromorfno funkcijo na D (isti postopek, le obrnjen).

$$D \subset \mathbb{C}^n \xrightarrow{f} [f_0(z)\colon f_1(z)\colon \ \ldots\colon f_N(z)] \in \mathbb{CP}^N$$

4^o Če so $f_0, \ldots, f_N$ holomorfne funkcije, $\forall z$ vsaj ena $f_j(z) \neq 0 \Rightarrow f$ holomorfna preslikava

5^o Naj bo $F = (P_0, P_1, \ldots, P_N)\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^N$ holomorfna preslikava, katere komponente P_j so homogeni polinomi stopnje d (vsi iste stopnje!). Torej je $F(tz) = t^d F(z)$ za vsak $t \in \mathbb{C}$. Predpostavimo, da je $F(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$. (To lahko velja samo v primeru ko je $n \leq N$.) Torej F preslika vsako kompleksno premico v $\mathbb{C}^{n+1}$ skozi izhodišče $z = 0$ v neko kompleksno premico skozi izhodišče v $\mathbb{C}^{N+1}$. Zato F določa natanko eno preslikavo $f\colon \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^N$, tako da komutira naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}_*^{n+1} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{C}_*^{N+1} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{CP}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{CP}^N \end{tikzcd}$$

Naloga. *Preveri, da je f holomorfna preslikava, ki je v vsakem paru standardnih lokalnih kart na obeh projektivnih prostorih podana z racionalno preslikavo v spremenljivkah $z = (z_0, z_1 \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.*

I.6 Krovne in kvocientne mnogoterosti

Trditev. *Naj bo $\pi\colon X \to Y$ lokalni homeomorfizem Hausdorffovih 2-števnih prostorov. Če ima Y strukturo $\mathcal{C}^r$-mnogoterosti, potem obstaja na X natanko določena struktura $\mathcal{C}^r$-mnogoterosti, tako da je π lokalni $\mathcal{C}^r$-difeomorfizem.*

Rečemo, da smo $\mathcal{C}^r$ strukturo na Y potegnili nazaj na X s homeomorfizmom.

Dokaz te trditve je preprost. Naj bo $\mathcal{V} = \{(V_j, \psi_j)\}$ $\mathcal{C}^r$-atlas na Y. Naj bo $U \subset X$ dovolj majhna odprta množica, tako da je $\pi(U) \subset V_j$ za nek j. Kompozicija $\psi \circ \pi\colon U \to \mathbb{R}^n$ je homeomorfizem na odprato podmnožico $(\psi_j \circ \pi)(U) \subset \mathbb{R}^n$. Par $(U, \psi_j\pi)$ vzamemo za lokalno karto na X. Prostor X lahko pokrijemo s takimi kartami in dobimo atlas $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ na X. Takoj vidimo, da je to $\mathcal{C}^r$-atlas. Prehodna preslikava: $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} = (\psi_j \circ \pi) \circ (\psi_i \circ \pi)^{-1} = \psi_j \circ \pi \circ (\pi|_{U_i})^{-1} \circ \psi_i^{-1} = \psi_j \circ \psi_i^{-1}$. Torej dobimo iste prehodne preslikave kot v atlasu $\mathcal{V}$ na Y.
Oglejmo si preslikavo $\pi|_{U_i}\colon U_i \to Y$ v paru lokalnih kart $(U_i, \psi_i \circ \pi)$ na X in (V_i, ψ_i) na Y:

$$\tilde{\pi} = \psi_i \circ \pi \circ (\psi_i \circ \pi)^{-1} = \psi_i \circ \pi \circ (\pi|_{U_i})^{-1} \circ \psi_i^{-1} = \mathrm{id}$$

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_i = \psi_i \circ \pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_i \arrow[d, "\psi_i"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\tilde{\pi} = \mathrm{id}"'] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Vidimo torej, da je v tem paru kart π podana z identično preslikavo.

Oglejmo si sedaj naslednji obratni problem. Naj bo $\pi\colon X \to Y$ lokalni homeomorfizem. Predpostavimo, da sta X in Y 2-števna Hausdorffova prostora in da je π surjektivna. Recimo, da je X opremljena s strukturo gladke $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti. Vprašanje je, kdaj obstaja $\mathcal{C}^r$-struktura na Y, da je π lokalni difeomorfizem.
Recimo, da za neko točko $y \in Y$ obstajata vsaj dve točki $x_1 \neq x_2 \in X$, tako da velja $\pi(x_1) = \pi(x_2) = y$. Ker je π lokalni homeomorfizem, obstajajo okolice $x_1 \in U_1 \subset X$, $x_2 \in U_2 \subset X$ in $y \in V \subset Y$, da je $\pi|_{U_j}\colon U_j \to V$ homeomorfizem za $j = 1, 2$. Če sta U_1, U_2 dovolj majhni, potem obstajata $\mathcal{C}^r$ lokalni karti $\varphi_j\colon U_j \xrightarrow{\approx} U_j' \subset \mathbb{R}^n$ za $j = 1, 2$. Sedaj dobimo dve lokalni karti na Y:

$(V, \underbrace{\varphi_j \circ (\pi|_{U_j})^{-1}}_{\psi_j})$ za $j = 1, 2$. Oglejmo si prehodno preslikavo:

$$\psi_2 \circ \psi_1^{-1} = \varphi_2 \circ (\pi|_{U_2})^{-1} \circ (\varphi_1 \circ (\pi|_{U_1})^{-1}) = \varphi_2 \circ (\pi|_{U_2})^{-1} \pi|_{U_1} \circ \varphi_1^{-1} = \varphi_2 \circ (\underbrace{(\pi|_{U_2})^{-1} \circ \pi|_{U_1}}_{U_1 \xrightarrow{\approx} U_2}) \circ \varphi_1^{-1}$$

Če bi vedeli, da je $\pi_{12} \stackrel{def}{=} (\pi|_{U_2})^{-1} \circ \pi|_{U_1}$ difeomorfizem (v dani $\mathcal{C}^r$-strukturi na X), lahko zaključimo, da sta karti (V, ψ_1) in (V, ψ_2) na Y $\mathcal{C}^r$ kompatibilni.
Sedaj bomo poiskali naravne pogoje na π, pri katerih je zgornji pogoj izpolnjen.

Definicija. *Zvezna surjektivna preslikava $\pi \colon X \to Y$ topoloških prostorov se imenuje krovna preslikava, če ima vsaka točka $y \in Y$ odprto okolico $V \subset Y$, katere praslika $\pi^{-1}(V) = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ je disjunktna unija odprtih podmnožic $U_\alpha \subset X$, tako da je za vsak $\alpha \in A$ zožitev $\pi|_{U_\alpha} \colon U_\alpha \xrightarrow{\approx} V$ homeomorfizem množice U_α na množico V. V tem primeru trojico (X, Y, π) imenujemo* krov. *Prostor X je* totalni prostor, *Y pa je* bazni prostor *krova.*

Krov je isto kot svežěnj z diskretno topologijo na vlaknu $A \cong \pi^{-1}(y)$. O svežnjih s splošnejšimi (nediskretnimi) vlakni bomo govorili kasneje.

Definicija. *Naj bo $\pi \colon X \to Y$ krov. Preslikava $f \colon X \to X$, ki zadošča pogoju $\pi \circ f = \pi$, se imenuje* krovna translacija. *Grupo vseh krovnih translacijo krova π označimo z $\mathrm{Deck}_\pi(X)$.*

Opomba. Očitno velja $\pi \circ f = \pi$ natanko tedaj, ko za vsako točko $x \in X$ leži njena slika $f(x)$ na istem vlaknu preslikave π. Iz definicij sledi, da je vsaka krovna translacija lokalno (na majhnih množicah) oblike $f|_{U\alpha} = (\pi|_{U_\beta})^{-1} \circ \pi|_{U_\alpha} \colon U_\alpha \to U_\beta$. $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ je dejansko grupa za kompozicijo $\circ$.

Naloga. *Naj bo X povezan, $f \in \mathrm{Deck}_\pi(X)$ in $f(x) = x$ za nek $x \in X$. Dokaži, da je $f = \mathrm{Id}_X$.*

Naloga. *Dokaži: Če je X kompakten in je $\pi \colon X \to Y$ surjektiven lokalen homeomorfizem, potem je π končnolistni krov (to je, krov s končnim vlaknom).*

Definicija. *Krov $\pi \colon X \to Y$ se imenuje* regularen, *če grupa $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ krovnih translacij deluje tranzitivno na vsakem vlaknu (to je, poljubni dve točki na istem vlaknu $\pi^{-1}(y)$ lahko preslikamo eno v drugo z neko krovno translacijo).*

Primer. 1^o Krožnica $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$. Naj bo $k \in \mathbb{N}$.
$\pi \colon S^1 \to S^1$, $\pi(z) = z^k$ je krovna projekcija.
Vlakno $\pi^{-1}(w) = \{z_1, \ldots, z_k\}$ so ravno vsi k-ti koreni števila w.

$$w = e^{i\theta} \colon \quad z_j = e^{\frac{i\theta}{k} + j\frac{2\pi i}{k}}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Grupa krovnih transformacij je generirana z rotacijo

$$S^1 \ni z \stackrel{\sigma}{\longmapsto} e^{\frac{2\pi i}{k}} z.$$

Torej je $\mathrm{Deck}_\pi S_1 = \langle \sigma \rangle = \mathbb{Z}_k := \mathbb{Z}/_{k\mathbb{Z}}$.

2^o Ista preslikava $z \mapsto z^k$, $\mathbb{C}_* \to \mathbb{C}_*$.

3^o $\mathbb{R} \xrightarrow{\pi} S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x} = w$
Vlakno: $\pi^{-1}(w) = x + \mathbb{Z}$
Grupa $\mathrm{Deck}_\pi(\mathbb{R})$ je generirana s preslikavo $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sigma(x) = x + 1$.
$\mathrm{Deck}_\pi \mathbb{R} = \langle \sigma \rangle = \mathbb{Z}$.

4^o Nadomestimo $\mathbb{R}$ s $\mathbb{C}$: $\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}_*$, $z \mapsto e^{2\pi i z}$.
$\mathrm{Deck}_\pi \mathbb{C} = \langle \sigma \rangle = \mathbb{Z}$, $\sigma(z) = z + 1$

Če je $\pi\colon X \to Y$ regularen krov, potem je očitno

$$Y \approx X/_{\mathrm{Deck}_\pi X} = X/_\sim,$$

kjer je relacija definirana s pogojem

$$x \sim x' \Leftrightarrow \exists \sigma \in \mathrm{Deck}_\pi X,\ \sigma(x) = x'.$$

Kvocient Y se v takem primeru imenuje *prostor orbit* grupe $\mathrm{Deck}_\pi X$.

Primer. $X = \mathbb{R}$, $\sigma(x) = x + 1$, $\mathbb{R}/_\sim = \mathbb{R}/_{x \sim x+1} = S^1$.

Sedaj si oglejmo obraten problem. Najprej si moramo ogledati pojem delovanja grupe na mnogoterosti. Označimo z $\mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$ množico vseh $\mathcal{C}^r$ diffeomorfizmov $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti X; to je očitno grupa za kompozicijo.

Definicija. *Naj bo X $\mathcal{C}^r$-mnogoterost in Γ neka abstraktna grupa z enoto 1. Γ deluje kot grupa $\mathcal{C}^r$ difeomorfizmov na X, če je vsakemu elementu $g \in \Gamma$ prirejen nek difeomorfizem $\theta_g \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$, tako da velja*

$$\theta_1 = \mathrm{Id}_X, \quad \theta_{gg'} = \theta_g \circ \theta_{g'} \quad \forall g, g' \in \Gamma.$$

Ekvivalentno, predpis $\Gamma \ni g \mapsto \theta_g \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$ je homomorfizem grup. (Odtod sledi $\theta_{g^{-1}} = \theta_g^{-1}$ za vsak $g \in \Gamma$.) Grupa deluje zvesto, *če $1 \neq g \in \Gamma \implies \theta_g \neq \mathrm{Id}_X$ (to je, homomorfizem $\Gamma \to \mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$, $g \mapsto \theta_g$, je injektiven).*

Tako delovanje grupe Γ na X se imenuje *levo delovanje*. *Desno delovanje* definiramo s pogojem $\theta_{gg'} = \theta_{g'} \circ \theta_g$. Omejili se bomo na leva delovanja.
Če je delovanje zvesto, lahko grupni element $g \in \Gamma$ identificiramo s prirejenim difeomorfizmom $\theta_g \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$; s tem identificiramo Γ z ustrezno podgrupo v $\mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$. V tem primeru bomo pogosto pisali

$$\theta_g(x) = g\cdot x, \quad x \in X,\ g \in \Gamma.$$

Brez izgube splošnosti se omejimo na zvesta delovanja.
Orbita točke $x \in X$ (glede na dano grupo) je množica

$$\Gamma x = \{g\cdot x \colon g \in \Gamma\} \subset X.$$

Očitno je X disjunktna unija orbit. Relacija

$$x \sim y \overset{def}{\iff} \left[\exists g \in \Gamma,\ \text{tako da } g\cdot x = y\right] \iff \Gamma x = \Gamma y$$

je očitno ekvivalenčna relacija na X. Kvocientni prostor $X/_\sim = X/_\Gamma$ se imenuje *prostor orbit.*

$$\begin{array}{c} X \\ {\scriptstyle \pi}\big\downarrow{\scriptstyle \text{kvoc. proj.}} \\ X/_\Gamma \end{array}$$

Vprašanje je, kdaj (pri kakšnih pogojih na delovanje) je $X/_\Gamma$ Hausdorffov prostor in kdaj je kvocientna projekcija $\pi\colon X \to X/_\Gamma$ krovna projekcija.

Definicija. *Naj bo X $\mathcal{C}^r$-mnogoterost in Γ neka diskretna grupa $\mathcal{C}^r$-difeomorfizmov mnogoterosti X ($\Gamma \subset \mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$). Grupa Γ deluje na X* povsem nezvezno *ali* diskretno *(angl.:* totally discontinuously*), če velja:*

1^o Vsaka točka $x \in X$ ima odprto okolico $U \subset X$, tako da je $gU \cap U = \emptyset$ razen za neko končno množico elementov $g \in \Gamma$.

2^o Za vsak par točk $x, x' \in X$, ki nista na isti orbiti ($\Gamma x \neq \Gamma y$) obstajata odprti okolici $x \in U \subset X$, $x' \in U' \subset X$, tako da je $gU \cap U' = \emptyset$ za vse $g \in \Gamma$. (Ekvivalentno, $gU \cap g'U' = \emptyset \quad \forall g, g' \in \Gamma$.)

Iz prve točke preprosto sledi, da je $gx = x$ za kvečjemu končno $g \in \Gamma$. Taka točka x se imenuje negibna točka *difeomorfizma g. Če poleg tega zahtevamo še*

3^o $gx \neq x \quad \forall x \in X,\ \forall g \in \Gamma \setminus \{1\}$

potem imamo diskretno delovanje brez fiksnih točk.

Če Γ deluje na X povsem nezvezno, potem iz zahteve (1) očitno sledi, da je za vsako točko $x \in X$ njena izotropna grupa

$$\Gamma_x = \{g \in \Gamma\colon g\cdot x = x\}$$

končna. (Očitno je Γ_x podgrupa grupe Γ.) V obratni smeri lahko dokažemo naslednje:

Trditev. *Če deluje Γ povsem nezvezno na X, potem za vsako točko $x \in X$ obstaja odprta okolica $x \in U \subset X$, tako da velja*

$$gU \cap U \neq \emptyset \iff g \in \Gamma_x.$$

Dokaz. Implikacija $\Leftarrow$ je očitna. Dokažimo sedaj implikacijo $\Rightarrow$. Recimo, da za neko okolico $U \subset X$ točke x elementi $g_1 = 1, g_2, \ldots, g_k \in \Gamma$ zadoščajo pogoju $g_j(U) \cap U \neq \emptyset$, za vse ostale elemente $g \notin \{g_1, \ldots, g_k\}$ pa velja $g(U) \cap U = \emptyset$. Če U zmanjšamo, se množica $\{g_1, \ldots, g_k\}$ kvečjemu zmanjša. Torej lahko izberemo U' tako, da za vsako manjšo okolico $x \in U' \subset U$ dobimo isto kolekcijo elementov $g_1, \ldots, g_k \in \Gamma$, ki zadošcajo zgornji predpostavki. Odtod sledi, da je $g_j(x) = x$ za $j = 1, \ldots, k$, torej so ti elementi v izotropni grupi Γ_x. Dokaz: Izberemo zaporedje vloženih okolic $U_1 = U' \supset U_2 \supset U_3 \supset \ldots$, $\bigcap_j U_j = \{x\}$. Za vsak U_l je $g_j(U_l) \cap U_l \neq \emptyset$. Torej obstaja $x_l \in U_l$, da je $g_l(x_l) \in U_l$. Pri $l \to \infty$ očitno velja $x_l \to x$ in $g_j(x_l) \to x$, saj se okolice U_l krčijo proti x. Iz zveznosti g_j sledi $g_j(x) = x$. $\square$

Posledica. *Če je delovanje brez negibnih točk in povsem nezvezno, potem za vsak $x \in X$ obstaja okolica $U \subset X$, da je $gU \cap U = \emptyset$, $\forall g \neq 1$.*

Naloga. *Dokaži: Če Γ deluje povsem nezvezno, potem je vsaka orbita $\Gamma x = \{gx\colon g \in \Gamma\} \subset X$ zaprta diskretna podmnožica v X (brez stekališč v X).*

Vprašanje: Recimo, da Γ deluje na X tako, da so vse njene orbite Γx diskretne v X in je vsaka izotropna grupa Γ_x končna. Ali odtod sledi aksiom 1^o v definiciji povsem nezveznega delovanja?

Izrek. *Naj bo X $\mathcal{C}^r$-mnogoterost ($r \in \{0, 1, \ldots, \infty, \omega, \mathcal{O}\}$). Če neka končna ali števna grupa Γ deluje na X povsem nezvezno in brez fiksnih točk, potem ima prostor orbit $X/_\Gamma = Y$ strukturo $\mathcal{C}^r$-mnogoterosti, tako da je kvocientna projekcija $X \xrightarrow{\pi} X/_\Gamma = Y$ krovna projekcija razreda $\mathcal{C}^r$ in je Γ ravno grupa njegovih krovnih translacij: $\Gamma = \mathrm{Deck}_\pi(X)$.*

Dokaz. Naj bo $x \in X$. Po pogojih izreka obstaja odprta okolica $U \subset X$, tako da je $gU \cap U = \emptyset$ za vsak $1 \neq g \in \Gamma$. Torej je $[U] = \pi(U) \subset Y$ okolica točke $\Gamma x = [x] \in Y$, za katero velja $\pi^{-1}([U]) = \bigsqcup_{g \in \Gamma} gU$ in so množice gU paroma disjunktne. Projekcija $\pi\colon gU \to [U]$ je očitno bijektivna in zvezna (po definiciji kvocientne topologije na Y). Poleg tega je π odprta preslikava, zato je zožitev $\pi\colon gU \to [U]$ homeomorfizem. Torej je Y lokalno evklidski prostor in je π krovna projekcija. Ker je X 2-števen, je tak tudi Y.
Zahteva 2^o v definiciji povsem nezveznosti nam zagotovi, da je kvocientni prostor Y Hausdorffov.
$\mathcal{C}^r$-strukturo na Y definiramo na naslednji način. Naj bo $x \in X$. Izberimo odprto okolico $x \in U \subset X$, tako da je $gU \cap U = \emptyset \quad \forall g \neq 1$. Okolico U po potrebi še zmanjšamo, tako da obstaja lokalna karta $\varphi\colon U \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ (v danem $\mathcal{C}^r$ atlasu na X). Sedaj vzamemo preslikavo

$$\varphi \circ (\pi|_U)^{-1}\colon \pi(U) \to \widetilde{U} \subset \mathbb{R}^n$$

za lokalno karto na Y. Če sta $\psi = \varphi \circ (\pi|_U)^{-1}$ in $\psi' = \varphi' \circ (\pi|_{gU})^{-1}$ (pri čemer je φ' lokalna karta na translatu gU) dve karti te oblike, je prehodna preslikava enaka

$$\psi' \circ \psi^{-1} = \varphi' \circ (\pi|_{gU})^{-1} \circ (\varphi \circ (\pi|_U)^{-1})^{-1} = \varphi' \circ \underbrace{(\pi|_{gU})^{-1} \circ \pi|_U}_{\theta_g \in \mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)} \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{C}^r$$

□

Primer. 1^o Končna ciklična grupa $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ deluje na $\mathbb{C}$ z generatorjem

$$\sigma(z) = e^{\frac{2\pi i}{k}} z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

To je ravno rotacija ravnine za k-ti koren enote.
Pripadajoča kvocientna projecija je $\pi(z) = z^k$. Torej je $\mathbb{C}/_{\langle\sigma\rangle} \cong \mathbb{C}$.
Orbita točke z je

$$\pi^{-1}(\pi(z)) = \{e^{2m\pi i/k} z\colon m = 0, 1, \ldots, k-1\}.$$

2^o $X = \mathbb{C}^2$, delovanje ciklične grupe $\mathbb{Z}_2$ z generatorjem $\sigma(z, w) = (-z, -w)$. Orbita točke (z, w) vsebuje še njej antipodno točko $(-z, -w)$. Definiramo polinomsko preslikavo

$$f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \quad f(z, w) = (z^2, w^2, zw).$$

Orbite dane grupe so ravno vlakna preslikave f. Torej je slika $f(\mathbb{C}^2) \subset \mathbb{C}^3$ ravno prostor orbit $\mathbb{C}^2/_\Gamma$. Očitno je

$$f(\mathbb{C}^2) = \{(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \in \mathbb{C}^3\colon \zeta_3^2 = \zeta_1\zeta_2\}$$

To je kvadratična kompleksna hiperploskev v $\mathbb{C}^3$, ki je singularna v izhodišču $(0, 0, 0)$.

3^o $X = \mathbb{R}^2$, delovanje ciklične grupe $\mathbb{Z}_2$ z generatorjem $\sigma(x, y) = (-x, y)$ (zrcaljenje čez y os).
$\mathbb{R}^2/_\Gamma = [0, \infty) \times \mathbb{R}$ (mnogoterost z robom).
Vse točke $(0, y)$ ($y \in \mathbb{R}$) so fiksne točke delovanja.

Naloga. *Recimo, da sta X, Y $\mathcal{C}^r$-mnogoterosti in je $\pi : X \to Y$ $\mathcal{C}^r$ krovna projekcija. Potem* $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ *deluje na X povsem nezvezno ter brez fiksnih točk. Elementi $g \in \mathrm{Deck}_\pi(X)$ so $\mathcal{C}^r$-difeomorfizmi.*

Edini problem: $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ v splošnem ne deluje tranzitivno na vlaknih krovne projekcije $\pi\colon X \to Y$. Če $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ deluje tranzitivno na vlaknih, potem se krov imenuje *regularen*. V tem primeru sledi, da je Y izomorfna prostoru orbit: $Y = X/_{\mathrm{Deck}_\pi(X)}$.

Zveza med krovi nad Y ter podgrupami v fundamentalni grup $\pi_1(Y)$.

Najprej bomo na kratko ponovili pojem *fundamentalne grupe* mnogoterosti, nato pa brez dokazov navedli nekaj bistvenih rezultatov o krovnih prostorih. Za dokaze glej npr. J. Mrčun: Topologija. Izbrana poglavja iz matematike in računalništva 44. DMFA, Ljubljana, 2008

Naj bo S^1 krožnica. Prelikave $\gamma\colon S^1 \to Y$ se imenujejo *zanke* v Y. Ekvivalentno, zanka je pot $\gamma\colon [0,1] \to Y$, pri kateri se začetna in končna točka ujemata: $\gamma(0) = \gamma(1)$. Izberemo neko točko $p \in Y$ in opazujemo le zanke, ki so pripete v točki p:

$$\gamma : S^1 \to Y \qquad \gamma(1) = p$$

Dve taki zanki γ in γ' sta *homotopni*, če obstaja zvezna preslikava $H\colon S^1 \times [0,1] \to Y$, ki zadošča pogojem

$$H(\cdot\,,0) = \gamma, \quad H(\cdot\,,1) = \gamma', \quad H(0,s) = H(1,s) = p \ (\forall s \in [0,1]).$$

Obstoj homotopije je ekvivalenčna relacija med zankami.
Homotopska grupa $\pi_1(Y,p)$ je množica homotopnih razredov zank v Y skozi p. V resnici je to grupa (v splošnem nekomutativna) z operacijo stika poti:

$$[\gamma][\gamma'] = [\gamma \cdot \gamma']$$

Naloga. *Preveri, da je ta operacija dobro definirana, to je, da je homotopski razred stika $\gamma \cdot \gamma'$ odvisen samo od homotopskega razreda obeh zank γ in γ'.*

Če je Y povezana, potem izbor bazne točke p ni bistven, saj so grupe $\pi_1(Y,p)$ za različne $p \in Y$ med seboj izomorfne. V tem primeru pišemo kar $\pi_1(Y)$.

Primer. $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathbb{C}_*) = \mathbb{Z}$, $\pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Povezana mnogoterost Y se imenuje *enostavno povezana*, če je njena fundamentalna grupa trivialna: $\pi_1(Y) = 0$. (Včasih pišemo grupno operacijo multiplikativno: $\pi_1(Y) = 1$.)

Primer. $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$ *za vsak* $n \geq 1$, $\pi_1(S^n) = 0$ *za vsak* $n > 1$.

Vsaka zvezna preslikavo $f\colon X \to Y$ inducira homomorfizem fundamentalnih grup

$$f_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y), \quad [\gamma] \mapsto [f \circ \gamma].$$

Slika $f_*(\pi_1(X))$ je podgrupa v $\pi_1(Y)$.
Če je f krovna preslikava, potem je f_* injektivna. Pri dokazu tega dejstva potrebujemo izrek o dvigu homotopij v krovu.

Izrek. *Če je Y povezana in enostavno povezana mnogoterost, potem je vsak krov $\pi\colon X \to Y$ trivialen, to je $X \approx Y \times F$, kjer je F (diskretno) vlakno.*

Izrek. *Naj bo Y povezana mnogoterost. Za vsako podgrupo $G \subset \pi_1(Y)$ obstaja krovni prostor $f\colon X \to Y$, tako da je totalni prostor X povezan in je $f_*(\pi_1(X)) = G$. Krov $f\colon X \to Y$ je regularen natanko tedaj, ko je G podgrupa edinka grupe $\pi_1(Y)$. Tedaj je* $\mathrm{Deck}_f(X) \approx \pi_1(Y)/_G$.

Poseben primer: $G = \{0\} \subset \pi_1(Y)$, $f_*\colon \pi_1(X) \xrightarrow{bij.} G \Rightarrow \pi_1(X) = 0 \Rightarrow X$ enostavno povezan. Tak krov $X \to Y$ se imenuje *univerzalen krov* nad Y.

Ta izrek velja v vseh $\mathcal{C}^r$ kategorijah. Če je $f\colon X \to Y$ $\mathcal{C}^r$ krov, je $\mathrm{Deck}_f(X) \subset \mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$.

Uporaba: Če želimo razumeti strukturo neke $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti (recimo pri klasifikaciji mnogoterosti), si ogledamo njen univerzalni krov $\pi\colon X \to Y$. Vemo, da je X enostavno povezan in je grupa krovnih translacij $\mathrm{Deck}_\pi(X)$ podgrupa v grupi $\mathrm{Diff}_{\mathcal{C}^r}(X)$, ki deluje na X prosto in povsem nezvezno. Kvocientna mnogoterost $Y = X/_{\mathrm{Deck}_\pi}(X)$ je prostor orbit te grupe.
S tem prevedemo problem klasifikacije mnogoterosti na problem klasifikacije enostavno povezanih mnogoterosti skupaj s prostim in povsem nezveznim delovanjem grup na njih.

Primer. Naj bo Y *Riemannova ploskev*, to je kompleksna mnogoterost $\dim_{\mathbb{C}} Y = 1$. Preprosti primeri so $\mathbb{C}$, domene v $\mathbb{C}$ in Riemannova sfera $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^2$.
Naj bo $X \xrightarrow{\pi} Y$ njen univerzalni krov. Potem je X enostavno povezana Riemannova ploskev.

Izrek (Riemann-Koebe)**.** *Vsaka enostavno povezana Riemannova ploskev je biholomorfno ekvivalentna eni od ploskev $\mathbb{CP}^1$, $\mathbb{C}$, $\Delta = \{|z| < 1\}$. (Riemannov upodobitveni izrek: Vsaka domena $D \subsetneq \mathbb{C}$, $\pi_1(D) = 1$, je biholomorfno ekvivalentna disku Δ.)*

Iz elementarne teorije funkcij ene kompleksne spremenljivke je znano, da so grupe holomorfnih avtomorfizmov teh treh ploskev naslednje:

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{Aut}_{\mathrm{holo}}(\mathbb{CP}^1) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\colon\ ad - bc \neq 0\} & \text{(ulomljene linearne funkcije)} \\
\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b\colon\ a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\} & \text{(kompleksna afina grupa)} \\
\mathrm{Aut}(\Delta) = \{z \mapsto e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\bar{a}z}\colon\ a \in \Delta, \theta \in \mathbb{R}\} & \text{(Möbiusove preslikave)}
\end{array}$$

Sedaj je treba najti diskretne podgrupe $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(X)$, $X \in \{\mathbb{CP}^1, \mathbb{C}, \Delta\}$, ki delujejo prosto in povsem nezvezno.

Ni težko preveriti, da ima vsak $\gamma \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{CP}^1$ negibno točko. Torej $\mathbb{CP}^1$ nima netrivialnih holomorfnih kvocientov.
$\gamma(z) = az + b$, $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ je brez negibne točke natanko tedaj, ko je $a = 1$ in $b \neq 0$. Torej je γ translacija $z \overset{\gamma}{\mapsto} z + b$. Grupa translacij $\mathbb{Z} \approx \langle\gamma\rangle \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ deluje na $\mathbb{C}$ brez fiksnih točk in povsem nezvezno.
Če $b = 1$: kvocientna projekcija $\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}_*$, $z \mapsto e^{2\pi i z}$. V splošnem $z \mapsto e^{\frac{2\pi i z}{b}}$:

$$e^{\frac{2\pi i}{b}(z+b)} = e^{\frac{2\pi i z}{b}} e^{2\pi i} = e^{\frac{2\pi i z}{b}}.$$

Naj bosta $a, b \in \mathbb{C}_*$, $\frac{a}{b} \notin \mathbb{R}$.

$$\gamma(z) = z + a, \quad \sigma(z) = z + b$$

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \approx \underbrace{\langle\gamma, \sigma\rangle}_{\Gamma} \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$$

$$\mathbb{C}/_\Gamma = \text{torus s kompleksno strukturo}$$

Brez izgube splošnosti lahko gledamo primer $a = 1$, $\omega = \frac{b}{a} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$$\Gamma_\omega = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$$

$$\mathbb{C}/_{\Gamma_\omega} = \mathbb{T}_\omega \quad \text{(kompleksen torus, ki pripada številu } \omega\text{)}$$

V mreži $\Gamma_\omega = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega$ lahko vselej najdemo število $\omega' = u + iv$, tako da je $\Gamma_\omega = \Gamma_{\omega'}$ in velja

$$|\omega'| > 1, \quad -\frac{1}{2} < u \leq \frac{1}{2} \quad \text{ali} \quad |\omega'| = 1, \quad 0 \leq u \leq \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Generator $\omega' \in \Gamma_\omega$ s temi lastnostmi je enolično določen in natanko določa kompleksno strukturo na torusu. Drugače povedano:

Izrek. *Če sta ω_1 in ω_2 dve kompleksni števili z lastnostmi (1), potem sta pripadajoča torusa $\mathbb{T}_{\omega_1} = \mathbb{C}/_{\Gamma_{\omega_1}}$ in $\mathbb{T}_{\omega_2} = \mathbb{C}/_{\Gamma_{\omega_2}}$ biholomorfno ekvivalentna natanko tedaj, ko je $\omega_1 = \omega_2$.*

Torej biholomorfno neekvivalentni kompleksni torusi sestavljajo kompleksno enoparametrično družino. (Za dokaz glej npr. L. V. Ahlfors, Complex analysis. Second ed. McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1966.) Vsi 2-torusi so med seboj difeomorfni.

Da se pokazati, da nobena grupa translacij ravnine $\mathbb{C}$ z več kot dvema generatorjema ne deluje povsem nezvezno. Odtod zaključimo, da so netrivialni holomorfni kvocienti ravnine $\mathbb{C}$ ravno $\mathbb{C}_*$ ter kompleksni torusi. Drugače povedano, če je Y enostavno povezana Riemannova ploskev, katere univerzalni krov je $\mathbb{C}$, potem je Y enaka eni od ploskev $\mathbb{C}, \mathbb{C}_*$ ali kompleksni torus.

Vse ostale Riemannove ploskve so holomorfni kvocienti diska $\Delta \subset \mathbb{C}$. Teh je veliko.

Naj bo S_g kompaktna orientabilna ploskev roda $g \in \mathbb{Z}_+$. Pri $g = 0$ je to 2-sfera, pri $g = 1$ imamo torus, za $g > 1$ pa je S_g povezana vsota g torusov. Taka ploskev ima do difeomorfizma natančno samo eno gladko strukturo. (To je, poljubni dve gladki strukturi na njej sta difeomorfni.)
Obstaja veliko grup $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Delta)$, ki delujejo na disku povsem nezvezno in prosto (brez fiksnih točk), tako da je kvocient $\Delta/_\Gamma$ (ki je Riemannova ploskev) difeomorfen ploskvi S_g:

$$\begin{array}{c} \Delta \\ \downarrow \pi \\ \Delta/_\Gamma \;\approx S_g \end{array}$$

Za različne grupe $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\Delta)$ lahko dobimo kvociente, ki so med seboj difeomorfni, niso pa biholomorfni.
Prostor modulov (imenovan tudi *Teichmüllerjev prostor*) je množica med seboj nebiholomorfnih kompleksnih struktur na dani ploskvi S_g. V primeru $g > 1$ lahko to množico predstavimo kot domeno v $\mathbb{C}^{3g-3}$, ki je homeomorfna krogli. (Več o uniformizacijski teoriji Riemannovih ploskev in o Teichmüllerjevih prostorih lahko najdete npr. v O. Lehto, Univalent functions and Teichmüller spaces. Graduate Texts in Mathematics, 109. Springer-Verlag, New York, 1987.)

II Tangentni sveženj in vektorska polja

II.1 Tangentni sveženj

Naj bo $\mathbb{R}^n \supset D \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ diferenciabilna preslikava.

Diferencial f v točki $p \in D$ je linearna preslikava $df_p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $v \mapsto df_p(v)$.

Tangentni prostor $T_p\mathbb{R}^n$ lahko razumemo kot množico vseh vektorjev $v \in \mathbb{R}^n$, pripetih v točki p. Torej je $T_p\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$. Tega pojma ne moremo direktno posplošiti na mnogoterosti, saj na njih nimamo linearne strukture in zato vektorjev ne moremo translatirati.

Naj bo $M \subset \mathbb{R}^n$ podmnogoterost. Lokalno lahko M podamo z enačbami:

$$M \cap U = \{x \in U \colon g_1(x) = 0, \ldots, g_d(x) = 0\}.$$

Lahko vzamemo, da so gradienti $\nabla g_1, \ldots, \nabla g_d$ linearno neodvisni. Sedaj lahko definiramo tangentni prostor M v točki $p \in M$ kot vektorski podprostor v tangentnem prostoru $T_p\mathbb{R}^n$:

$$T_pM = \{v \in T_p\mathbb{R}^m \colon \underbrace{dg_j(p) \cdot v = 0}_{\Leftrightarrow \nabla g_j(p) \perp v},\ \forall j = 1, \ldots, d\}$$

Če je $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ neka $\mathcal{C}^1$ pot, $\gamma(0) = p$, potem velja $g_j(\gamma(t)) \equiv 0$, $j = 1, \ldots, d$. Z odvajanjem teh identitet po t pri $t = 0$ dobimo:

$$\nabla g_j(\gamma(0)) \cdot \dot\gamma(0) = 0 \Longrightarrow \dot\gamma(0) \in T_pM.$$

Obratno: vsak vektor $v \in T_pM$ je hitrostni vektor $v = \dot\gamma(0)$ neke $\mathcal{C}^1$ poti $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$.

Ta ideja se da posplošiti na mnogoterosti. Tangentni vektorji v točki $p \in X$ bodo ravno hitrostni vektorji poti v X, ki gredo pri $t = 0$ skozi p.

Za vektorje $v \in T_p\mathbb{R}^n$ imamo še drugo naravno interpretacijo, ki se ravno tako da posplošiti na mnogoterosti. Vektorju $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ priredimo smerni odvod:

$$\nabla_v f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) v_j = \nabla f(p) \cdot v.$$

Označimo z $\mathcal{C}_p^\infty$ algebro zarodkov gladkih funkcij v točki p. (Zarodek funkcije v točki p je predstavljen s funkcijo v neki odprti okolici te točke, pri čemer dve funkciji predstavljala isti zarodek v točki p, če se ujemata v neki okolici p.) Operator ∇_v je linearen operator

$$\nabla_v \colon \mathcal{C}_p^\infty \to \mathbb{R}$$

ki zadošča Leibnizovemu pravilu

$$\nabla_v(fg) = \nabla_v f \cdot g(p) + f(p) \cdot \nabla_v f$$

Obe predstavi tangentnih vektorjev na $\mathbb{R}^n$ omogočata posplošitev na mnogoterosti.

Geometrijska konstrukcija tangentnega prostora.
Naj bo X mnogoterost vsaj $\mathcal{C}^1$, $p \in X$, $\gamma\colon (-\epsilon, \epsilon) \to X$ pot razreda $\mathcal{C}^1$, $\gamma(0) = p$.

Definicija. $\gamma \sim \gamma' \overset{def}{\iff}$ *obstaja lokalna karta* (U, φ) *na* X*,* $p \in U$*, tako da velja*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi \circ \gamma = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi \circ \gamma.$$

Trditev. *Definicija relacije $\sim$ je neodvisna od izbire lokalne karte. Tako definirana relacija $\sim$ je ekvivalenčna relacija.*

Dokaz. Naj bo (V, ψ) neka druga karta na X. Tedaj velja:

$$\psi \circ \gamma = (\underbrace{\psi \circ \varphi^{-1}}_{\text{prehodna}}) \circ (\underbrace{\varphi \circ \gamma}_{\text{pot v } \mathbb{R}^n}) \quad \text{pot v } \mathbb{R}^n$$

$$(\psi \circ \gamma)^{\cdot}(0) = d(\psi\varphi^{-1})_{(\varphi(p))}(\varphi \circ \gamma)^{\cdot}(0) = d(\psi\varphi^{-1})_{(\varphi(p))}(\varphi \circ \gamma')^{\cdot}(0) = (\psi \circ \gamma')^{\cdot}(0)$$

$\square$

Označimo z $[\gamma]_p$ ekvivalenčni razred poti γ glede na relacijo $\sim$.

Definicija. *Tangentni prostor mnogoterosti X v točki p je*

$$T_pX = \{[\gamma]_p \colon \gamma\colon (-\epsilon, +\epsilon) \to X \ \mathcal{C}^1 \ \textit{pot}\ , \ \gamma(0) = p\}.$$

Primer. $X = \mathbb{R}^n$, $p \in X$. Preverimo definicijo kar v identični karti.

$$\gamma \sim \gamma' \iff \dot\gamma(0) = \dot\gamma'(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Oglejmo si preslikavo

$$T_p\mathbb{R}^n \ni [\gamma]_p \mapsto \dot\gamma(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Ta preslikava je bijektivna. Injektivna je po definiciji relacije $\sim$; surjektivnost vidimo tako, da vsakemu vektorju $v \in \mathbb{R}^n$ priredimo pot $\gamma(t) = p + tv$; očitno je $[\gamma]_p \mapsto \dot\gamma(0) = v$.
S pomočjo te preslikave identificiramo tangentni prostor $T_p\mathbb{R}^n$ z $\mathbb{R}^n$.

Naj bo X poljubna $\mathcal{C}^1$-mnogoterost, $p \in X$. Izberemo lokalno karto (U, φ) na X, $p \in U$.

$$v \in T_pX, \quad v = [\gamma]_p \overset{d\varphi_p}{\longmapsto} [\varphi \circ \gamma]_{\varphi(p)=0} = (\varphi \circ \gamma)^{\cdot}(0) \in T_0\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$$

$d\varphi_p \colon T_pX \overset{\approx}{\longrightarrow} T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$ je bijekcija. Surjektivnost: $v \in T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \varphi(p) + tv$ je pot v $\mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)$ pot v X, $\gamma(0) = p$. Preveri: $d\varphi_p[\gamma]_p = v$.
$d\varphi_p$ se imenuje diferencial preslikave φ v točki p. Sedaj definirajmo diferencial poljubne preslikave.

Definicija. *Naj bo $f\colon X \to Y$ neka $\mathcal{C}^1$ preslikava. Njen diferencial v točki p je preslikava $df_p\colon T_pX \to T_{f(p)}Y$, definirana s predpisom*

$$df_p[\gamma]_p \overset{def}{=} [f \circ \gamma]_{f(p)}, \quad [\gamma]_p \in T_pX.$$

Trditev. *Diferencial df_p je dobro definirana preslikava, torej je desna stran odvisna le od ekvivalenčnega razreda poti $[\gamma]_p \in T_pX$, ne pa od izbire predstavnika.*

Dokaz. Naj bosta poti γ in γ' ekvivalentni v p: $[\gamma]_p = [\gamma']_p$. To pomeni, da za vsako lokalno karto (U, φ) na X, $p \in U$, velja $(\varphi \circ \gamma)^{\cdot}(0) = (\varphi \circ \gamma')^{\cdot}(0)$. Dokazati moramo, da sta poti $f \circ \gamma$ in $f \circ \gamma'$ ekvivalentni, torej da velja

$$[\varphi \circ \gamma]_{f(p)} = [f \circ \gamma']_{f(p)}$$

Izberimo karto (V, ψ) na Y, tako da je $f(p) \in V$. Zgornji pogoj je ekvivalenten

$$(\psi \circ f \circ \gamma)^{\cdot}(0) = (\psi \circ f \circ \gamma')^{\cdot}(0)$$

To sledi z uporabo verižnega pravila za preslikave med evklidskimi prostori:

$$\begin{aligned}(\psi f \gamma)^{\cdot}(0) = (\psi f \varphi^{-1} \varphi \gamma)^{\cdot}(0) = ((\psi f \varphi^{-1}) \circ (\varphi\gamma))^{\cdot}(0) = d(\psi f \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(\varphi\gamma)^{\cdot}(0) = \\ = d(\psi f \varphi^{-1})_{\varphi(p)}(\varphi\gamma')^{\cdot}(0) = (\psi f \gamma')^{\cdot}(0).\end{aligned}$$

$\square$

Definicija. *Naj bo X $\mathcal{C}^1$-mnogoterost. Tangentni sveženj mnogoterosti X je disjunktna unija tangentnih prostorov v točkah $p \in X$:*

$$TX = \bigsqcup_{p \in X} T_pX$$

Označimo s $\pi \colon TX \to X$ bazno projekcijo; torej je $\pi^{-1}(p) = T_pX$.

$\mathcal{C}^1$ preslikavi $f \colon X \to Y$ mnogoterosti priredimo njeno tangentno preslikavo

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & TY \arrow[d, "\pi'"] \\ X \arrow[r, "f"] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

$$Tf \colon T_pX \to T_{f(p)}Y$$
$$Tf|_{T_pX} = df_p = \text{ diferencial } f \text{ v točki } p$$

Osnovni primer: $X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m$: $TX = X \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, če identificiramo $T_p\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$ kot prej. Isto velja, če je X odprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$: $TX = X \times \mathbb{R}^n$.

$$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \forall p \in \mathbb{R}^n : df_p \colon T_p\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m \approx \mathbb{R}^m$$

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{Tf} & Y \times \mathbb{R}^m \\ (x, v) & \mapsto & (f(x), df_x \cdot v) \end{array}$$

V tem primeru, ko je TX kar produkt baze z vlaknom $\mathbb{R}^n$, pravimo, da je TX trivialen sveženj ranga n nad X (izomorfen produktnemu svežnju $X \times \mathbb{R}^n$).

Izrek. *Tangentna preslikava zadošča naslednjim lastnostim:*

1° $f = \mathrm{Id}_X \Rightarrow Tf = \mathrm{Id}_{TX}$

2° $f \in \mathcal{C}^1(X,Y))$, $g \in \mathcal{C}^1(Y,Z) \Longrightarrow T(g \circ f) = Tg \circ Tf$

3° $f \in \mathrm{Diff}(X,Y), f^{-1}\colon Y \to X \Longrightarrow T(f^{-1}) = (Tf)^{-1}$

Te lastnosti sledijo neposredno iz že znanih lastnosti diferenciala. Prireditev

$$\begin{array}{ccc} X & \rightsquigarrow & TX \\ (f\colon X \to Y) & \rightsquigarrow & (Tf : TX \to TY) \end{array}$$

je kovarianten funktor iz kategorije $\mathcal{C}^r$-mnogoterosti v kategorijo $\mathcal{C}^{r-1}$-vektorskih svežnjev nad $\mathcal{C}^r$-mnogoterostmi. Ta funktor se imenuje *tangentni funktor*.

Na TX konstruiramo strukturo $\mathcal{C}^{r-1}$-mnogoterosti (celo več, $\mathcal{C}^{r-1}$ vektorskega svežnja nad X) takole: Naj bo

$$\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$$

$\mathcal{C}^r$-atlas na X.

$$\varphi_\alpha \rightsquigarrow T\varphi_\alpha\colon TX|_{U_\alpha} = \bigcup_{p \in U_\alpha} T_pX = TU_\alpha \xrightarrow{\approx} TU'_\alpha = U'_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

$$[\gamma]_p \xrightarrow{T\varphi_\alpha} (\varphi_\alpha(p), (\varphi_\alpha \circ \gamma)^{\cdot}(0))$$

Vsako preslikavo te oblike $T\varphi_\alpha\colon TX|_{U_\alpha} \to U'_\alpha \times \mathbb{R}^n$ vzamemo s "sveženjsko karto" na TX. Tako dobimo na TX atlas

$$\{(TU_\alpha, T\varphi_\alpha)\}$$

Denimo, da $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \neq 0$. Izračunamo prehodno preslikavo:

$$(T\varphi_a) \circ (T\varphi_\beta)^{-1}\colon \underbrace{\varphi_\beta(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^n}_{=T(\varphi_\beta(U_{\alpha\beta}))} \to \underbrace{\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \times \mathbb{R}^n}_{=T(\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}))}$$

$$T(\varphi_\alpha)(T\varphi_\beta)^{-1} = T(\varphi_\alpha) \circ T(\varphi_\beta^{-1}) = T(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) = T(\varphi_{\alpha\beta})$$
$$(x,v) \mapsto (\varphi_{\alpha\beta}(x), d\varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot v)$$

$\varphi_{\alpha\beta}(x)$ je $\mathcal{C}^r$-difeomorfizem, $d\varphi_{\alpha\beta}(x)$ pa je predstavljena z neizrojeno $n \times n$ matrično funkcijo, katere komponente so prvi parcialni odvodi od komponent $\varphi_{\alpha\beta}$, torej so $\mathcal{C}^{r-1}$ funkcije. Zato je preslikava

$$(x,v) \mapsto d\varphi_{\alpha\beta}(x) \cdot v$$

razreda $\mathcal{C}^{r-1}$ v obeh spremenljivkah; v spremenljivki $v \in \mathbb{R}^n$ je linearna.

Topologija na X je enolično določena z zahtevo, da je vsaka množica oblike $TX|_{U_\alpha}$ odprta v TX in da je sveženjska karta homeomorfizem:

$$T\varphi_\alpha\colon TX|_{U_\alpha} \xrightarrow{\approx} U'_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

Očitno je X topološka mnogoterost (brez roba, če je X brez roba). Njena dimenzija je $\dim TX = 2\dim X$. Zgoraj opisani atlas določa na TX strukturo $\mathcal{C}^{r-1}$-mnogoterosti. Vsako vlakno $T_pX = \pi^{-1}(p)$ v tangentnem svežnju ima natanko eno strukturo n-dimenzionalnega vektorskega prostora ($n = \dim X$), realnega, če je X realna, kompleksnega, če je X kompleksna, tako da je za vsako karto (U, φ) na X prirejena tangentna preslikava

$$\begin{aligned} T\varphi\colon TX|_U &\xrightarrow{\approx} \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \\ p \in U: \quad T_pX &\xrightarrow{d\varphi_p} d\varphi_p \cdot v \end{aligned}$$

linearna na vsakem vlaknu (torej linearni izomorfizem). Ker je prehodna preslikava med dvema kartama linearni izomorfizem na vsakem vlaknu, je ta linearna struktura na T_pX dobro definirana (neodvisna od izbire karte).

Tangentni prostor podmnogoterosti.
Naj bo $X \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{C}^r$-podmnogoterost dimenzije m in kodimenzije $d = n - m$. Za vsako tovˇ cko $p \in X$ obstaja okolica $U \subset \mathbb{R}^n$ in $\mathcal{C}^r$-funkcije $g_1, \ldots, g_d\colon U \to \mathbb{R}$ z linearno neodvisnimi gradienti, da je

$$X \cap U = \{x \in U\colon g_j(x) = 0,\ j = 1, \ldots, d\}.$$

Tangentni sveženj $TX|_{X\cap U}$ je enak

$$TX|_{X\cap U} = \{(x, v)\colon x \in U,\, v \in \mathbb{R}^n,\, g_j(x) = 0,\, dg_j(x) \cdot v = 0,\ j = 1, \ldots, d\}$$

Odtod vidimo, da je TX $\mathcal{C}^{r-1}$-podmnogoterost mnogoterosti $T\mathbb{R}^n|_X = X \times \mathbb{R}^n$, in tudi $\mathcal{C}^{r-1}$-podmnogoterost v $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Velja še nekoliko več. Dopolnimo preslikavo $g = (g_1, \ldots, g_d)\colon U \to \mathbb{R}^d$ do lokalne karte

$$\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m, g_1, \ldots, g_d)\colon U \to \phi(U) = U' \subset \mathbb{R}^n.$$

Prirejena sveženjska karta $T\phi\colon TU \to TU' = U' \times \mathbb{R}^n$ na tangentnem svežnju $T\mathbb{R}^n$ preslika $TX|_U$ na množico

$$\phi(U \cap X) \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d) = (U' \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d)) \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d).$$

Torej se vsako vlakno T_pX ($p \in U \cap X$) preslika z lokalno sveženjsko karto $T\phi$ v standardni linearni podprostor $\mathbb{R}^m \times \{0\}^d \subset \mathbb{R}^n$. V takem primeru pravimo, da je TX *vektorski podsveženj* ranga m svežnja $T\mathbb{R}^n|_X \cong X \times \mathbb{R}^n$.
Analogno konstrukcijo lahko naredimo v splošnejšem primeru, ko je X podmnogoterost v poljubni mnogoterosti Y.

Algebraična konstrukcija tangentnega svežnja (osnovna ideja).
Da se izognemo določenim nevsebinskim tehničnim težavam, se omejimo na primer, ko je X $\mathcal{C}^\infty$-mnogoterost. Definirajmo

$$\mathcal{C}^\infty_{p,X} = \text{ algebra zarodkov gladkih funkcij v } p \in X.$$

Tangentni prostor T_pX definiramo kot množico vseh operatorjev $v\colon \mathcal{C}^\infty_p \to \mathbb{R}$, ki so linearni in zadoščajo Leibnitzovemu pravilu

$$v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(0) + f(0) \cdot v(g).$$

Taki operatorji se imenujejo *derivacije* na algebri zarodkov $\mathcal{C}^\infty_{p,X}$. Torej bomo tangentne vektorje $v \in T_pX$ predstavili z derivacijami.
Oglejmo si sedaj osnovni primer $X = \mathbb{R}^n$, $p = 0 \in \mathbb{R}^n$. Vsako gladko funkcijo v okolici točke 0 lahko predstavimo v obliki

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(0) + \sum_{j=1}^{n} x_j\, g_j(x_1, \ldots, x_n)$$

za neke gladke funkcije $g_1, \ldots, g_n$ v neki okolici 0. Z uporabo Leibnitzovega pravila za konstantni funkciji $f \equiv 1,\ g \equiv 1$ dobimo

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1) \cdot 1 + 1 \cdot v(1) = 2v(1) \Rightarrow v(1) = 0 \Rightarrow v(\text{konst.}) = 0$$

Definiramo $v_j = v(x_j) \in \mathbb{R}$ (derivacija v deluje na koordinatni funkciji x_j).

$$v(f) = \underbrace{v(f(0))}_{=0} + \sum_{j=1}^{n} v(x_j) \cdot g_j(0) + \sum_{j=1}^{n} (x_j)|_0 \cdot v(g_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot g_j(0) = \left. \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) (f) \right|_{x=0}$$

S tem vidimo, da je vsaka derivacija na algebri $\mathcal{C}^\infty_{0,\mathbb{R}^n}$ predstavljena s smernim odvodom $\sum\limits_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ v smeri vektorja s komponetami $v_j = v(x_j)$. S tem dobimo izomorfizem $T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.
Sedaj definirajmo diferencial preslikave. Če je $f\colon X \to Y$ neka $\mathcal{C}^\infty$-preslikava gladkih mnogoterosti, potem je za vsak $p \in X$ preslikava

$$f^* \colon \mathcal{C}^\infty_{f(p),Y} \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_{p,X}, \quad g \xmapsto{f^*} g \circ f$$

(povlek, 'pull-back') homomorfizem algeber zarodkov. Diferencial $df_p\colon T_pX \to T_{f(p)}Y$ definiramo kot njej dualno preslikavo: za vsako 'testno funkcijo $g \in \mathcal{C}^\infty_{f(p,Y}$ je

$$(df_p \cdot v)(g) \stackrel{def}{=} v(g \circ f).$$

Ni težko preveriti, da tako definiran diferencial in prirejena tangentna preslikava $TX \to TY$ zadoščata istim lastnostim, kot smo jih dobili pri geometrijski konstrukciji. S tem dobimo ekvivalentno konstrukcijo tangentnega funktorja. (Natančneje, algebraični tangentni funktor je naravna translacija geometrijskega tangentnega functorja.) V praksi pogosto uporabljamo oba pristopa, odvisno od vrste problema.

II.2 Vektorska polja

Definicija. *Vektorsko polje na mnogoterosti X je prerez tangentnega svežnja, to je funkcija $v\colon X \to TX$, za katero je $v_p \in T_pX$, $\forall p \in X$.*

Za vsak $p \in X$ izberemo nek tangentni vektor $v_p \in T_pX$.
Vektorsko polje v je razreda $\mathcal{C}^k$ (za nek $k \leq r$, če je $\mathcal{C}^k$ preslikava $X \to TX$.

Naj bo $X = U^{odprta} \subset \mathbb{R}^n$. Običajna oznaka:

$$v_x = (x, \underbrace{v_1(x), \ldots, v_n(x)}_{\in \mathbb{R}^n})$$

Uvedemo standardna koordinatna vektorska polja na $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \qquad \text{smerni odvodi v koordinatnih smereh.}$$

Za vsako točko $p \in \mathbb{R}^n$ so vektorji $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ standardna baza tangentnega prostora $T_p\mathbb{R}^n$. Vsako vektorsko polje na neki odprti množici $U \subset \mathbb{R}^n$ je linearna kombinacija koordinatnih polj:

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Koeficienti g_j so funkcije na U. Vektorsko polje je gladko razreda $\mathcal{C}^k$ natanko tedaj, ko so vse komponente g_j $\mathcal{C}^k$ funkcije.

II.2.1 Preslikave vektorskih polj z difeomorfizmom

Naj bo $f\colon X \to Y$ $\mathcal{C}^r$-difeomorfizem in v vektorsko polje na X. Potem je $f_*v = w$ vektorsko polje na Y, določeno s pogojem

$$(f_*v)_{f(p)} = df_p \cdot v_p, \quad p \in X.$$

Če je vektorsko polje v razreda $\mathcal{C}^k$ za nek $k \leq r-1$, potem je tu preslikano vektorsko polje $w = f_*v$ razreda $\mathcal{C}^k$.

Poseben primer: Naj bo (U, φ) lokalna karta na X. Obstajajo natanko določena vektorska polja $e_1, \dots, e_n$ na $U \subset X$, tako da je

$$\varphi_* e_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

V vsaki točki $p \in U$ so vektorji $e_j|_p$ baza tangentnega prostora T_pX. Tako določena n-terica $(e_1, \dots, e_n)$ se imenuje je *polje baz* na $TX|_U$ (angl.: frame field). Vsako vektorsko polje v na $U \subset X$ lahko enolično zapišemo v obliki

$$v_p = \sum_{j=1}^{n} v_j(p)\, e_j, \quad g_1, \dots, g_n\colon U \to \mathbb{R}.$$

Če označimo $x = \phi(p) \in \mathbb{R}^n$, dobimo

$$\phi_* v|_x = \sum_{j=1}^{n} v_j(p) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_x = \sum_{j=1}^{n} v_j(\phi^{-1}(x)) \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_x.$$

Naj bo $f = (f_1, \dots, f_n)\colon D \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow{difeo.} D' \subset \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \overset{f}{\mapsto} y = (y_1, \dots, y_n)$. Izberimo poljubno 'testno' funcijo $g\colon D' \to \mathbb{R}$. Po definiciji diferenciala velja

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x\right)(g) = \frac{\partial}{\partial x_j}(g \circ f) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(g(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(x)) \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}$$

Ker to velja za vsako testno funkcijo g, dobimo

$$f_* \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_x \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_k}\bigg|_{f(x)}$$

Odtod vidimo, da predstavlja linearno preslikavo $f_* = df_x \colon T_x\mathbb{R}^n \to T_{f(x)}\mathbb{R}^n$ (diferencial) v paru standardnih baz na $T_x\mathbb{R}^n$, $T_{f(x)}\mathbb{R}^m$ ravno Jacobijeva matrika preslikave f_*:

$$\left[\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right]_{1\le j,k\le n}$$

Tako definirana preslikava vektorskih polj obstaja tudi v nekaterih drugih primerih.

1^o f difeomorfizem $X \xrightarrow{f} Y$, w vektorsko polje na Y, potem je

$$\begin{aligned} v &= f^*w && \text{povlek (pull-back) polja } w \text{ na } X \\ &= (f^{-1})_*w && \text{potisk (push-forward) z inverzno preslikavo} \end{aligned}$$

2^o $f \colon X \to Y$ lokalni difeomorfizem $\Leftrightarrow$ $df_x \colon T_xX \xrightarrow{\approx} T_{f(x)}Y$ je linearni izomorfizem (izrek o inverzni preslikavi).
Če je w $\mathcal{C}^k$ vektorsko polje na Y, potem obstaja natanko eno vektorsko polje v na X, da je $f_*v = w$. Torej je povlek $v = f^*w$ dobro definiran.

3^o Recimo, da je $f \colon X \to Y$ regularen $\mathcal{C}^r$-krov, $r \ge 1$. Potem grupa $\Gamma = \mathrm{Deck}_f(X)$ krovnih translacij deluje na X prosto in povsem nezvezno ter je $Y = X/_\Gamma$. Naj bo v vektorsko polje na X. Kdaj obstaja $w = f_*v$ na Y? Pogoj:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow df_x \cdot v_x = df_{x'} \cdot v|_{x'} \iff \underbrace{\gamma_* v = v}_{d\gamma_x \cdot v(x) = v(\gamma(x))}, \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

Vektorsko polje v, ki zadošča lastnosti $\gamma_*v = v$, se imenuje γ-invariantno. Če to velja za vsak $\gamma \in \Gamma$ v neki grupi difeomorfizmov Γ mnogoterosti X, se imenuje v Γ-invariantno.

Primer. $\mathbb{R}^2$, Γ grupa translacij z 2 generatorjema, $\Gamma = \langle \gamma, \sigma \rangle$, npr. $\gamma(x, y) = (x + 1, y)$, $\sigma(x, y) = (x, y + 1)$. Vsako konstantno vektorsko polje

$$v = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

je Γ-invariantno. Torej obstaja vektorsko polje w na $\mathbb{R}^2/_\Gamma = T =$ (torus), prirejeno polju v glede na kvocientno projekcijo $\pi \colon \mathbb{R}^2 \to T$. Integralne krivulje polja w so slike premic s smernim vektorjem $k = b/a$. Če je število k iracionalno, je slika vsake take premice povsod gosta v torusu.

4^o Vektorsko polje vzdolž preslikave $X \xrightarrow{f} Y$. Naj bo v vektorsko polje na X in w vektorsko polje na Y. Polje w je prirejeno v vzdolž preslikave f, če velja $df_x \cdot v(x) = w(f(x))$ za vsak $x \in X$. Pogosto gledamo w kot polje na Y, ki je definirano samo vzdolž slike $f(x)$.

II.2.2 Tok vektorskega polja

Definicija. *Naj bo v vektorsko polje na mnogoterosti X. $\mathcal{C}^r$ pot $\gamma\colon (\alpha,\beta) \subset \mathbb{R} \to X$ se imenuje* integralna krivulja *(ali* tokovnica*) polja v, če velja*

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = v(\gamma(t)), \quad t \in (\alpha,\beta).$$

Pri tem je $\frac{\partial}{\partial t}$ koordinatno polje na $\mathbb{R}$. V lokalnih koordinatah $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Pot $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ je integralna krivulja natanko tedaj, ko velja

$$\gamma_* \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{j=1}^{n} \dot{\gamma}_j(t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} v_j(\gamma(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Dobimo sistem navadnih diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1(t) &= v_1(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \\ &\vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) &= v_n(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \end{aligned}$$

Eksistenčni izrek za navadne diferencialne enačbe: Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ odprta, $v\colon D \to \mathbb{R}^n$ Lipschitzova preslikava. Potem za $\forall x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$ obstaja okolica $x^0 \in U \subset D$ te točke in število $t_0 > 0$, tako da ima zgornji sistem navadnih diferencialnih enačb skupaj z začetnim pogojem

$$\gamma(0) = x \in U$$

natanko eno rešitev $\gamma(t,x)$ za vsak $t \in (-t_0, t_0)$ in vsako začetno točko $x \in U$. Rešitev $\gamma\colon (-t_0,t_0) \times U \to \mathbb{R}^n$ je zvezna v (t,x),odvedljiva po t, in njen t-odvod $\dot{\gamma}(t,x)$ je zvezen v $(t,x) \in (-t_0,t_0) \times U$.

Če je $v(x) = 0$ (singularna točka vektorskega polja) za nek x, je tokovnica skozi to točko konstantna preslikava $\gamma(t,x) \equiv x$.

Od sedaj dalje bomo lokalno rešitev zgornjega sistema navadnih diferencialnih enačb pisali v obliki $\phi_t(x)$ in jo imenovali *tok polja v*. Torej je za vsak fiksen $x \in X$ preslikava $t \mapsto \phi_t(x)$ tokovnica polja v, ki gre pri času $t = 0$ skozi točko $\phi_0(x) = x$.

Primer. Linearno polje na $\mathbb{R}^n$:

$$v(x) = Ax$$

kjer je A neka $n \times n$ matrika. Enačba toka je sistem linearnih parcialnih diferencialnih enačb prvega reda z začetnim pogojem:

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x^0.$$

Tok:

$$\varphi_t(x) = e^{tA}x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k\right) x$$

Globalno definiran za $\forall t \in \mathbb{R}$.

Opomba: V nekaterih tekstih se za tok φ_t polja v uporablja oznaka

$$\varphi_t(x) = e^{tv}x$$

To pride iz primera, ko je $v(x) = Ax$ linearno polje in $\varphi_t(x) = e^{tA}x$.

Definicija. *Vektorsko polje v na mnogoterosti X je kompletno, če njegov tok $\varphi_t(x)$ obstaja za vsak $x \in X$ in $t \in \mathbb{R}$.*

Primer. Na $\mathbb{R}$ opazujemo vektorsko polje $v(x) = x^2$. Enačba toka je $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0$. Pri začetnemu pogoju $x_0 = 0$ dobimo konstanten tok $\phi_t(0) = 0$. Pri $x_0 \neq 0$ dobimo

$$\phi_t(x_0) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} = \frac{x_0}{1 - tx_0}.$$

Pri času $t_0 = \frac{1}{x_0}$ ima funkcija $\phi_t(x_0)$ pol. Če je $x(0) > 0$, potem tok $\phi_t(x)$ obstaja za vse $-\infty < t < t_0$. Pri začetnemu pogoju $x_0 < 0$ tok $\phi_t(x_0)$ obstaja za vse $t_0 < t < +\infty$.

Lema. *Naj bo $f\colon X \to Y$ naj bo $\mathcal{C}^1$-preslikava, v vektorsko polje na X in w vektorsko polje na Y (vsaj Lipschitzovi). Če velja $df_x v_x = w_{f(x)}$ za vsak $x \in X$, potem f preslika vsako tokovnico polja v v neko tokovnico polja w. Natančneje: če je $\varphi_t(x)$ tok polja v in je $\psi_t(y)$ tok polja w, potem je $f(\varphi_t(x)) = \psi_t(f(x))$.*

Dokaz. To je preprosta uporaba verižnega pravila. Preslikava $t \mapsto \psi_t(f(x))$ je očitno tokovnica polja w, ki je pri $t = 0$ v točki $f(x)$. Trdimo, da je tudi $t \mapsto f(\varphi_t(x))$ tokovnica polja w. Odvajamo:

$$\frac{d}{dt}(f(\varphi_t(x)) = df_{\varphi_t(x)} \cdot \frac{d\varphi_t}{dt}(x) = df_{\varphi_t(x)} \cdot v(\varphi_t(x))$$

Pri $t = 0$ je $f(\varphi_0(x)) = f(x)$. Iz enoličnosti integralnih krivulj sledi $f(\varphi_t(x)) = \psi_t(f(x))$. □

Trditev. *Tok $\varphi_t(x)$ poljubnega vektorskega polja v zadošča grupnemu pravilu:*

$$\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_s(\varphi_t(x)) \quad \textit{(kjer sta obe strani definirani)}, \quad \varphi_0 = \mathrm{Id}\,.$$

Dokaz. Fiksiramo točko x in število $s \in \mathbb{R}$, tako da je $\varphi_s(x)$ definiran. Definiramo

$$\gamma(t) = \varphi_{t+s}(x), \qquad \sigma(t) = \varphi_t(\varphi_s(x)).$$

Pri $t = 0$ dobimo $\gamma(0) = \varphi_s(x) = \sigma(0)$. Pišimo $u = t + s$. Z uporabo verižnega pravila dobimo:

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\varphi_{t+s}(x) = \frac{d\varphi}{du}(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} = v(\varphi_u(x)) = v(\varphi_{t+s}(x)) = v(\gamma(t)),$$

$$\dot{\sigma}(t) = \dot{\varphi}_t(\varphi_s(x)) = v(\varphi_t(\varphi_s(x)) = v(\sigma(t)).$$

Torej sta γ in σ tokovnici polja v, ki gresta pri $t = 0$ skozi isto točko. Iz enoličnosti sledi $\gamma = \sigma$. □

Iz enakosti
$$\mathrm{Id} = \varphi_0 = \varphi_{-t} \circ \varphi_t$$
sledi, da je za vsak fiksen t preslikava φ_t difeomorfizem svojega definicijskega območja $\Omega_t \subset X$ na območje $\varphi_t(\Omega_t) \subset X$, z inverzom $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$. Taka družina $\{\varphi_t\}$ se imenuje *lokalna enoparametrična grupa difeomorfizmov.* (Beseda 'lokalna' se nanaša na dejstvo, da φ_t ni nujno definiran na vsem X.)
Če je vektorsko polje v kompletno, je $\varphi_t \colon X \to X$ difeomorfizem za vsak t. Družina
$$\{\varphi_t \colon t \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Diff}(X)$$
se tedaj imenuje *enoparametrična grupa difeomorfizmov* mnogoterosti X.

Posledica. *Če je $M \subset X$ podmnogoterost in je v vektorsko polje na X, ki je tangentno na M v vsaki točki $x \in M$ (to je, $v(x) \in T_xM \subset T_xX$ za vsak $x \in X$), potem za vsak $x \in M$ velja $\varphi_t(x) \in M$ na definicijski domeni toka.*

Dokaz. Uporabimo lemo zgoraj za vložitev $f \colon M \hookrightarrow X$. Ker je polje v tangentno na M vzdolž M, določa vektorsko polje w na M z enačbo $w_x = v_x$ za $x \in M$. Torej je $f_*w = v$. Po lemi zgoraj preslika f tokovnice polja w v tokovnice polja v. Za vsako točko $x \in M$ je tokovnica polja w hkrati tudi tokovnica polja v, torej je enaka $t \mapsto \phi_t(x)$. Sledi $\phi_t(x) \in M$. $\square$

Primer. $\mathbb{R}^2$: $v(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$
$\langle v, x^2+y^2\rangle = (-y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y})(x^2+y^2) = -2xy + 2xy = 0$
Torej je polje v tangentno na vsako nivojnico funkcije x^2+y^2 (krožnice).

II.2.3 Fundamentalna domena toka

Lokalni eksistenčni izrek: $\forall x_0 \in X$ ima okolico $U_{x_0} \subset X$ in $\varepsilon_{x_0} > 0$, tako da je tok $\varphi_t(x)$ definiran $\forall x \in U_{x_0}$ in $\forall t \in (-\varepsilon_{x_0}, \varepsilon_{x_0})$. Če je $K \subset X$ kompaktna, potem sledi, da $\varphi_t(x)$ obstaja $\forall x \in K$ in $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, kjer je $\varepsilon > 0$ neodvisen od začetne točke $x \in K$. Zaradi enoličnosti rešitev vidimo, da za vsak $x \in X$ obstaja največji odprt interval $I_x = (\alpha(x), \omega(x)) \subset \mathbb{R}$, $-\infty \le \alpha(x) < 0 < \omega(x) \le +\infty$, tako da je tok $\varphi_t(x)$ definiran $\forall t \in I_x$.

Fundamentalna domena toka ϕ_t množica
$$\Omega = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \colon t \in I_x,\ \forall x \in X\}.$$
Očitno je $X \times \{0\} \subset \Omega$.
Da se videti, da je funkcija $\omega \colon X \to (0, +\infty]$ navzgor polzvezna in je $\alpha \colon X \to [-\infty, 0)$ navzdol polzvezna. Odtod sledi, da je fundamentalna domena odprta množica v $X \times \mathbb{R}$.

Trditev. *Če je za nek $x \in X$ velja $\omega(x) < +\infty$, potem za vsak kompakt $K \subset X$ obstaja število $\varepsilon > 0$, da $\varphi_t(x) \notin K$ če $\omega(x) - \varepsilon < t < \omega(x)$. Analogno velja v primeru $\alpha(x) > -\infty$.*

To pomeni: Če je $\omega(x) < +\infty$, potem $\varphi_t(x)$ zapusti vsak kompakt, ko t narašča proti $\omega(x)$.

Dokaz. Za vsak kompakt K obstaja število $\varepsilon > 0$, tako da tok $\varphi_t(y)$ obstaja za vsako začetno točko $y \in K$ in za vsak $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Recimo sedaj, da za nek $x \in X$ in nek $t \in (\omega(x) - \varepsilon, \omega(x))$ velja $\varphi_t(x) \in K$. Zaradi grupne lastnosti toka je
$$\varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_{t+s}(x), \quad \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$
Če s izberemo blizu ε, dobimo $t + s > \omega(x)$, kar je v protislovju z definicijo števila $\omega(x)$. $\square$

Posledica. *Če je X kompaktna mnogoterost brez roba (sklenjena), potem je vsako vektorsko polje na X kompletno.*

Posledica. (Izrek Lyapunova.) *Naj bo $\rho\colon X \to \mathbb{R}$ gladka funkcija izčrpanja, to je, za vsak $c \in \mathbb{R}$ je podnivojnica $\{x \in X\colon \rho(x) \leq c\}$ kompaktna. Naj bo v vektorsko polje na X, ki zadošča pogoju $d\rho_x \cdot v_x \leq 0$ za vse x, ki zadoščajo $\rho(x) \geq c_0$ za nek $c_0 \in \mathbb{R}$. Potem je vektorsko polje v kompletno v pozitivnem času, to je, $\omega(x) = +\infty$ za vsak $x \in X$.*

Dokaz. Z uporabo verižnega pravila dobimo:

$$\frac{d}{dt}\rho(\varphi_t(x)) = d\rho(\varphi_t(x)) \cdot \frac{d\varphi_t(x)}{dt} = d\rho(\varphi_t(x)) \cdot v(\varphi_t(x)) \leq 0, \quad \text{če je } \rho(\varphi_t(x)) \geq c_0.$$

To pomeni, da funkcija $t \mapsto g(t) = \rho(\varphi_t(x))$ ne narašča na nobenem intervalu, na katerem je njena vrednost $\geq c_0$.
Izberemo poljubno točko $x \in X$. Nato izberemo število $c \geq c_0$, tako da je $\rho(x) \leq c$. Iz zgornje lastnosti sledi

$$g(t) = \rho(\varphi_t(x)) \leq c \quad \forall t \in [0, \omega(x)).$$

V nasprotnem primeru bi namreč obstajalo število $t_1 \in (0, \omega(x))$, da bi bilo $g(t_1) > c$. Ker je $g(0) = \rho(x) < c$, bi obstajala točka $t_2 \in (0, t_1)$, v kateri je $g(t_2) > c$ in $\dot{g}(t_2) > 0$. To je v protislovju z zgoraj dokazano lastnostjo.
Odtod sledi, da tok $\varphi_t(x)$ za $0 \leq t < \omega(x)$ ostaja v kompaktni množici $\{\rho \leq c\}$. Po prejšnji trditvi zaključimo, da je $\omega(x) = +\infty$. □

Primer. $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funkcija izčrpanja
$v = -\frac{\rho}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$ Hamiltonsko polje funkcije ρ.
$v(\rho) \equiv 0 \Leftrightarrow v$ tangentno na nivojnice, te so kompaktne $\Rightarrow v$ kompletno.

II.2.4 Lokalna oblika vektorskega polja v nesingularni točki

Problem: Vektorsko polje želimo lokalno v okolici neke točke $p \in X$ čim bolj poenostaviti s primerno izbiro lokalnih koordinat.

Trditev. *Če je vektorsko polje v na X v neki točki $p \in X$ različno od 0, $v_p \neq 0$, potem obstaja lokalna karta (U, ψ) v okolici točke p, tako da je $\psi_* v = \frac{\partial}{\partial x_1}$ (koordinatno vektorsko polje na $\mathbb{R}^n$ v smeri prve spremenljivke x_1).*

Dokaz. V nekih lokalnih koordinatah smo na odprti okolici točke $0 \in \mathbb{R}^n$, $p \rightsquigarrow 0$,

$$v(x) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad v(0) \neq 0.$$

Z linearno zamenjavo koordinat dosežemo $v(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}|_0$. (Dovolj bi bilo zahtevati $v_1(0) > 0$.)
Naj bo φ_t tok polja v. Definiramo preslikavo g v okolici $0 \in \mathbb{R}^n$ takole:

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n).$$

Njen odvod po x_1 je enak

$$g_* \frac{\partial}{\partial x_1} \approx \frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n) = v(\varphi_{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)) = v(g(x)).$$

Torej preslika g koordinatno polje $\frac{\partial}{\partial x_1}$ v polje v. V točki $x = 0$ je

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = v(0) = (1, 0, \dots, 0).$$

Na hiperravnini $x_1 = 0$ je $g(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x_2, \dots, x_n)$ identiteta, zato je

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = (0, \dots, 1, \dots, 0), \qquad j = 2, \dots, n.$$

Torej je $dg(0) = \mathrm{Id}$. Po izreku o inverzni preslikavi je g difeomorfizem v neki okolici 0. Njen inverz $\psi = g^{-1}$ tedaj zadošča $\psi_* v = \frac{\partial}{\partial x_1}$. $\square$

Točke p, v katerih je $v(p) = 0$, se imenujejo kritične točke (ali singularne točke) polja v. V lokalnih koordinatah lahko vzamemo $p = 0 \in \mathbb{R}^n$. Tedaj je

$$v(x) = Ax + o(|x|), \qquad A \quad n \times n \text{ matrika.}$$

Členov višjega reda v splošnem ne moremo odpraviti z zamenjavo koordinat.
Primer: V polju $v(x) = x + \alpha x^n$ $(x \in \mathbb{R})$ v splošnem ne moremo odpraviti člena αx^n. Če $c > 0$, $c \neq 1$, potem lahko z zamenjavo koordinat nelinearne člene odpravimo in polje v lineariziramo: $v = cx + o)x) \rightsquigarrow v(x) = cx$.

II.3 Komutator (Liejev oklepaj) vektorskih polj

Naj bosta v, w $\mathcal{C}^2$ vektorski polji na mnogoterosti X in g neka $\mathcal{C}^2$ funkcija na X.

$$[v, w]\,(g) \overset{def}{=} v(w(g)) - w(v(g)) \quad \text{funkcija na } X$$

Preveri: $g \mapsto [v, w]\,(g)$ je derivacija v vsaki točki:

- linearna v g (aditivna, homogena)
- zadošča Leibnitzovemu pravilu.

V $\mathbb{R}^n$:

$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad w = \sum_{j=1}^{n} w_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$v(w(g)) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^{n} w_k(x) \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) = \sum_{j,k=1}^{n} \left(v_j(x) \frac{\partial w_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} + v_j(x) w_k(x) \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j} \right)$$

$$w(v(g)) = \sum_{j,k=1}^{n} \left(w_j(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} + w_j(x) v_k(x) \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k} \right)$$

V razliki se členi $\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j}$ krajšajo in dobimo:

$$[v, w]\,(g) = \sum_{k=1}^{n} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} v_j(x) \frac{\partial w_k}{\partial x_j} - w_j(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_j}}_{a_k(x)} \right) \frac{\partial g}{\partial x_k}$$

$$[v, w]\,(g) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \frac{\partial g}{\partial x_k}$$

g je testna funkcija, torej:

$$[v, w] = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} (v(w_k) - w(v_k)) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Primer. $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$. Splošneje, če sta v, w konstantni vektorski polji na $\mathbb{R}^n$ (s konstantni koeficienti), potem je $[v, w] = 0$.

Primer. $v = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $w = \frac{\partial}{\partial x_1} + h(x_1, x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$, $[v, w] = \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}$.

Algebraične lastnosti komutatorja $[\cdot, \cdot]$ (domača naloga): Če sta v in w $\mathcal{C}^r$-vektorski polji, $r \geq 2$, potem je $[v, w]$ $\mathcal{C}^{r-1}$ vektorsko polje in velja:

1^o Operacija je $\mathbb{R}$-linearna v obeh faktorjih:

$$\begin{aligned}
&[v_1 + v_2, w] = [v_1, w] + [v_2, w] \\
&[v, w_1 + w_2] = [v, w_1] + [v, w_2] \\
&[tv, w] = t\,[v, w]\,, \quad t \in \mathbb{R} \\
&[v, tw] = t\,[v, w]\,, \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

2^o $[fv, w] = f\,[v, w] - w(f)\,v$

3^o $[v, w] + [w, v] = 0$ (v posebnem: $[v, v] = 0$)

4^o Jacobijeva identiteta:

$$[[u, v]\,, w] + [[w, u]\,, v] + [[v, w]\,, u] = 0$$

Označimo z $\aleph(X)$ množico vseh gladkih vektorskih polj na gladki mnogoterosti X. To je $\mathbb{R}$-vektorski prostor. Z operacijo $[\cdot, \cdot]$ je $\aleph(X)$ Liejeva algebra.

Opomba. Operacija $(v, w) \mapsto [v, w]$ je "lokalna", to je, vrednost komutatorja $[v, w]$ v neki točki je odvisna le od vrednosti polj v, w v neki odprti okolici te točke.

Trditev. *Če je $f \colon X \to Y$ gladek difeomorfizem in sta v, w vektorski polji na X, potem velja*

$$f_*[v, w] = [f_*v, f_*w].$$

To pomeni, da je vseeno, v katerih koordinatah računamo komutator.

Dokaz. Izberimo gladko funkcijo g na Y. Spomnimo se:

$$(f_*v)|_{f(x)}(g) = v(g \circ f)(x).$$

(Leva stran je vrednost vektorskega polja f_*v na funkciji g v točki $f(x)$, desna stran pa vrednost vektorskega polja v na funkciji $g \circ f$ v točki x.) Z večkratno uporabo tega dejstva dobimo:

$$\begin{aligned}
f_*[v,w](g) \circ f &= [v,w](g \circ f) \\
&= v(w(g \circ f) - w(v(g \circ f)) \\
&= v((f_*w)(g) \circ f) - w((f_*v)(g) \circ f) \\
&= (f_*v)(f_*(w)(g) \circ f - (f_*w)(f_*v)(g) \circ f \\
&= (f_*v)(f_*(w)(g) \circ f - (f_*w)(f_*v)(g) \circ f \\
&= [f_*v, f_*w](g) \circ f.
\end{aligned}$$

Ker to velja za vsako gladko testno funkcijo g na Y, sledi $f_*[v,w] = [f_*v, f_*w]$. □

Opomba. Trditev lahko posplošimo: Če sta v, w vektorski polji na X in sta $\tilde{v}, \tilde{w}$ vektorski polji na Y, tako da za neko gladko preslikavo $f\colon X \to Y$ velja $df_x v_x = \tilde{v}_{f(x)}$ in $df_x w_x = \tilde{w}_{f(x)}$, sledi

$$df_x[v,w]_x = [\tilde{v}, \tilde{w}]_{f(x)}.$$

II.4 Liejev odvod

To je odvod vektorskega polja vzdolž toka nekega drugega vektorskega polja.
Naj bosta v in w vektorski polji in naj bo $\varphi_t(x)$ tok polja v. Vemo, da je družina $\{\varphi_t\}$ lokalna grupa difeomorfizmov.

Definicija. *Liejev odvod w v smeri polja v definiramo kot*

$$L_v W|_x \overset{def}{=} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \varphi_t^* w \in T_x X = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\varphi_t^*|_x - w|_x)$$

Definicija je dobra, ker jo uporabimo za drugo tenzorsko polje. To definicijo lahko posplošimo za tenzorsko polje splošnega tipa. Če je f funkcija, potem

$$L_v f|_x = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\varphi_t(x)) = v(f)(x) = df_x v_x$$

Primer. *Naj bodo $x = (x_1, \ldots, x_n)$ lokalne koordinate in $v = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Njegov tok*

$$\varphi_t(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + t, x_2, \ldots, x_n)$$

je premik.

$$w = \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$\begin{tikzcd}
T_x\mathbb{R}^n \arrow[r, "d\varphi_t", "transl."'] \arrow[d, "\approx"'] & T_{\varphi_t(x)}\mathbb{R}^n \arrow[d, "\approx"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "id"'] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}(\varphi_t^* w) &= (d\varphi_{-t})_{\varphi_t(x)} w|_{\varphi_t(x)} \\ &= (d\varphi_{-t})_{\varphi_t(x)} \sum_{j=1}^n b_j(x_1+t, x_2, \ldots, x_n) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{\varphi(t)} \\ &= \sum_{j=1}^n b_j((x_1+t), x_2, \ldots, x_n) \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x\end{aligned}$$

V tem primeru torej sledi

$$L_{\frac{\partial}{\partial x_1}} \left(\sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x_1}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Trditev. $\frac{d}{dt}(\varphi_t^* w) = \varphi_t^*(L_v w)$, $\forall t$.

Dokaz. Pri $t = 0$ je to definicija, $\varphi_0 = \mathrm{Id}$.
Naj bo $t = s + u$, kjer s fiksiramo in u spreminjamo.

$$\varphi_t^* = (\varphi_s \circ \varphi_u)^* w = \varphi_u^*(\varphi_s^* w)$$

Zapišemo kot

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=s} \varphi_t^* w = \left.\frac{d}{du}\right|_{u=0} \varphi_u^*(\varphi_s^* w) \\ &= L_v(\varphi_s^* w) \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{1}{u}(\varphi_u^*(\varphi_s^* w) - \varphi_s^* w) \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{1}{u}(\varphi_s^*(\varphi_u^* w - w)) \\ &= \varphi_s^*(\lim_{u\to 0} \frac{1}{u}(\varphi_u^* w - w)) = \varphi_s^*(L_v w)\end{aligned}$$

□

Trditev. *Če je $f\colon X \to Y$ difeomorfizem in sta v, w vektorski polji na X, potem velja*

$$f_*(L_v w) = L_{f_* v} f_* w$$

Izračun Liejevega odvoda je torej neodvisen od izbire koordinat na X.

Dokaz. Naj bo φ_t tok polja v, $\tilde{\varphi}_t$ tok polja $\tilde{v} := f_* v$ na Y. Vemo:

$$f \circ \varphi_t(x) = \tilde{\varphi}_t \circ f(x).$$

Pišimo $\tilde{w} = f_* w$, to je isto kot $w = f^* \tilde{w}$. Dobimo

$$(f \circ \varphi_t)^* \tilde{w} = \varphi_t^* \circ f^* \tilde{w} = \varphi_t^* w$$

To pa je enako

$$(\tilde{\varphi}_t \circ f)^* \tilde{w} = f^* \circ \tilde{\varphi}_t^* \tilde{w}$$

Sledi:

$$\varphi_t^* w = f^*(\tilde{\varphi}_t^* \tilde{w})$$

Odvajamo po t pri $t = 0$:

$$L_v w = f^* \left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{\varphi}_t^* \tilde{w} \right) = f^*(L_{\tilde{v}} \tilde{w}) \Leftrightarrow f_*(L_v w) = L_{\tilde{w}} \tilde{w}$$

□

Sedaj bomo pokazali, da je Liejev odvod enak Liejevemu oklepaju.

Trditev. *Za vsak par vektorskih polj u, v velja $L_v w = [v, w]$*

Dokaz. V primeru $v = \frac{\partial}{\partial x_1}$ je

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j(x)}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

torej trditev velja.
Naj bo $p \in X$ taka točka, v kateri je $v_p \neq 0$. Potem obstaja zamenjava lokalnih koordinat, ki preslika polje v v kooordinatno polje $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Ker vemo, da enakost velja v primeru $v = \frac{\partial}{\partial x_1}$ ter je izračun obeh polj $[v, w]$ in $L_v w$ neodvisen od izbire koordinatah, sledi željena enakost v točki p. Če je $p \in X$ taka točka, da je $v_x = 0$ za vsak x v neki okolici p, potem je očitno $[v, w]_p = 0$. Poleg tega tok $\varphi_t(x) \equiv x$ na tej okolici miruje, zato sledi tudi $L_v w|_p = 0$.
Iz definicije sledi, da sta obe vektorski polji $[v, w]$ in $L_v w$ zvezni. Njuna enakost v vseh točkah $p \in X$ sedaj sledi po zveznosti. □

Posledica. *$L_w v = -L_v w$.*

Trditev. *Naj bo φ_t tok polja v in ψ_s tok polja w. Potem*

$$L_v w = 0 \Leftrightarrow \varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t.$$

To pomeni, da polji v, w komutirata ($[v, w] = 0$) natanko tedaj, ko njuna tokova komutirata.

Dokaz. ($\Leftarrow$) Odvajamo po s pri $s = 0$ (t in x sta fiksna):

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \varphi_t(\psi_s(x)) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \psi_s(\varphi_t(x))$$

$$d\varphi_t|_x \cdot \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \psi_s(x) = w|_{\varphi_t(x)}$$

$$d\varphi_t|_x w_x = w|_{\varphi_t(x)} \Leftrightarrow \varphi_t^* w \overset{t}{\equiv} w \qquad (w \text{ je } \varphi_t \text{ invariantno } \forall t)$$

Sedaj odvajamo po t pri $t = 0$:

$$L_v w = 0$$

($\Rightarrow$) Naj bo $L_v w = 0$. Iz prejšnje trditve:

$$\frac{d}{dt} \varphi_t^* w = \varphi_t^*(L_v w) = \varphi_t^*(0) = 0.$$

Odtod sledi, da je polje $t \mapsto \varphi_t^* w$ neodvisno od t.
Oglejmo si pot $s \mapsto \gamma(s) \overset{def}{=} \varphi_t(\psi_s(x))$, kjer sta x in t fiksna.
Začetna točka: $\gamma(0) = \varphi_t(x)$. Odvajamo po s:

$$\mathring{\gamma}(s) = d\varphi_t|_{\varphi_t(\psi_s(x))} \cdot \underbrace{\frac{d}{ds}\psi_s(x)}_{w|_{\psi_s(x)}} = w|_{\varphi_t(\psi_s(x))}.$$

Torej je γ je tokovnica polja w, $\mathring{\gamma}(0) = \varphi_t(x)$.
Sedaj si ogledamo še naslednjo pot:

$$\sigma(s) \overset{def}{=} \psi_s(\varphi_t(x)),\ \sigma(0) = \varphi_t(x),\ \frac{d\sigma}{ds}(s) = w(\psi_s \circ \varphi_t(x)) = w(\sigma(s)).$$

Torej je σ tokovnica polja w. Iz $\sigma(0) = \varphi_t(x) = \gamma(0)$ sledi po enoličnosti tokovnic $\sigma \overset{s}{\equiv} \gamma$. To ravno pomeni $\varphi_t(\psi_s(x)) = \psi_x(\varphi_t(x))$. $\square$

Poseben primer: $v = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $w = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$.
Izračunali smo: $[v, w] = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial x_1}(x)\frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \Leftrightarrow$ koeficienti b_j niso odvisni od x_1:

$$w = \sum_{j=1}^{n} b_j(x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1}$$

Evidentno: integralne krivulje so translacijsko invariantne v x_1-smer, torej, če je $\psi_s(x)$ neka integralna krivulja polja w, potem je tudi $\varphi_t(\psi_s(x)) = \psi_s(x)+(t, 0, \ldots, 0) = \psi_s(x_1+t, x_2, \ldots, x_n)$ integralna krivulja polja w.

II.5 Komutirajoča polja in Frobeniusov izrek

Izrek. *Naj bodo $v_1, v_2, \ldots, v_m$ linearno neodvisna vektorska polja na mnogoterosti X, ki paroma komutirajo:*

$$[v_j, v_k] = 0, \quad j, k = 1, \ldots, m.$$

Potem ima vsaka točka $p \in X$ odprto okolico $U \subset X$ in lokalno karto $\psi \colon U \to \psi(U) = U' \subset \mathbb{R}^n$, tako da je

$$\psi_* v_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Obratno: če taka karta ψ obstaja, potem $\psi_*[v_j, v_k] = [\psi_* v_j, \psi_* v_k] = [\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}] = 0.$

Dokaz. V neki lokalni karti prevedemo na primer $X = \mathbb{R}^n$, $p = 0$. Naj bo

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad j = 1, \ldots, m$$

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo:

$$\det(a_{jk}(0))_{j,k=1}^{m} \neq 0.$$

Odtod sledi, da je $v_1(0), \ldots, v_m(0), \frac{\partial}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ baza tangentnega prostora $T_0\mathbb{R}^n$.
Naj bo φ_t^j tok polja v_j. Označimo $d := n - m$. Definiramo preslikavo $g(x)$ v okolici izhodišča $x = 0$ takole:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi^1_{x_1} \circ \ldots \circ \varphi^m_{x_m}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

(Torej začnemo v točki $(0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n)$ in gremo za čas x_j v smeri polja v_j za vsak $j = 1, \ldots, m$.) Izračunamo odvod po spremenljivki x_1:

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi^1_{x_1} \circ \varphi^2_{x_2} \circ \ldots \circ \varphi^m_{x_m}(0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n)) = v_1(g(x))$$

Pri računanju odvoda po x_2 upoštevamo, da polji v_1 in v_2 komutirata:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi^2_{x_2} \circ \varphi^1_{x_1} \circ \ldots \circ \varphi^m_{x_m}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{m}, x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Enako kot prej sledi $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x) = v_2(g(x))$. Analogen sklep velja za ostale spremenljivke, torej je

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) = v_j(g(x)), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Torej je $g_* \frac{\partial}{\partial x_j} = v_j$, $\forall j = 1, \ldots, m$.

Ker je $g(0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n)$, sledi

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(0) = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = m+1, \ldots, n.$$

Torej je diferencial dg_0 neizrojen. Iz izreka o inverzni preslikavi sledi, da je g difeomorfizem v neki okolici 0 v $\mathbb{R}^n$. Naj bo $\psi = g^{-1}$ njegov inverz; tedaj je $\psi_* v_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. $\square$

Naj bo X gladka mnogoterost. Za vsak $x \in X$ naj bo $E_x \subset T_xX$ vektorski podprostor v T_xX, $\dim E_x = m = \operatorname{rang} E$ (neodvisen od x). Predpostavimo, da je E_x gladko odvisen od $x \in X$.

$$E = \bigsqcup_{x \in X} E_x \subset TX$$

Natančneje, zahtevajmo, da je E *gladek vektorski podsveženj tangentnega svežnja svežnja* TX, kar pomeni naslednje:

Vsaka točka $p \in X$ *ima okolico* $U \subset X$ *in gladko sveženjsko karto* $TX|_U \xrightarrow[\theta]{\approx} U \times \mathbb{R}^n$, $n = \dim X$, *tako da je*

$$\theta(E|_U)] = U \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d), \quad d = n - m.$$

Ekvivalentno: $\forall p \in X$ $\exists U^{okolica}$ in m gladkih vektorskih polj $V_1, \ldots, V_m$ na U, tako da je

$$E_x = \operatorname{Lin}\{V_1(x), \ldots, V_m(x)\}$$

(V prejšnji definiciji: $V_j(x) = \theta^{-1}(x, (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)))$

Definicija. *Podmnogoterost M v X je integralna podmnogoterost podsvežnja $E \subset TX$, če je $\forall x \in X$: $T_xM \subset E_x$.*

Od tod sledi $\dim M \leq m = \dim E_x$.

Primer. $m = 1$. *E lokalno definiran z vektorskim poljem V.*
Integralna podmnogoterost E je neparametrizirana tokovnica polja E, le da hitrost gibanja ni bistvena.

Obstoj tokovnic vektorskega polja pove, da imamo vselej 1-dimenzionalne integralne podmnogoterosti.

Vprašanje: Kdaj obstajajo lokalne integralne podmnogoterosti M dimenzije $m = \text{rang} E$?

Recimo, da je $M \subset X$ neka integralna podmnogoterost svežnja $E \subset TX$, $\dim M = m = \text{rang}\, E$.
Naj bodo $V_1, \ldots, V_m$ vektorska polja, ki napenjajo E na neki odprti množici $U \subset X$.
Trdimo: Vektorsko polje $[V_j, V_k]$ je tudi tangentno na E v točkah iz $U \cap M$.
Dokaz: Naj bodo $g_1, \ldots, g_d \colon U \to \mathbb{R}$ lokalne definicijske funkcije $M \cap U$.

$$[V_j, V_k](g_l) = V_j(V_k(g_l)) - V_k(V_j(g_l)), \quad V_k(g_l)|_{M\cap U} = 0,\, V_j(g_l)|_{M\cap U} = 0$$

$$\implies [V_j, V_k](g_l) = dg_l[V_j, V_k] = 0 \text{ v točkah iz } M \cap U.$$

Ker to velja za vsak g_l, $l = 1, \ldots, d$, sledi

$$[V_j, V_k]|_x \subset \bigcap_{l=1}^{m} \ker(dg_l)_x = T_xM \quad \forall x \in M \cap U.$$

Odtod sledi, da je komutator $[V_j, V_k]$ linearna kombinacija polj $V_1, \ldots, V_m$ na $M \cap U$.

Zaključek: Če ima E integralne mnogoterosti dimenzije $m = \text{rang} E$ skozi vsako točko $x \in X$, mora E zadoščati naslednjemu pogoju:

Definicija. *Podsveženj $E \subset TX$ ranga m je involutiven, če ima vsaka točka $p \in X$ okolico $U \subset X$, na kateri je $E|_U$ generiran z gladkimi vektorskimi polji $V_1, \ldots, V_m$, tako da je vsak komutator $[V_j, V_k]$ spet polje, ki je tangentno na $E|_U$.*

Opomba: Ker polja $V_1, \ldots, V_m$ generirajo $E|_U$, je pogoj v definiciji ekvivalenten

$$[V_j, V_k] = \sum_{l=1}^{m} a_{jkl} V_l, \quad j, k = 1, \ldots, m$$

za neke gladke funkcije a_{jkl} na U.

Naloga: Preveri, da je involutivnostni pogoj neodvisen od izbire lokalnih vektorskih polj $V_1, \ldots, V_m$, ki generirajo E.

Izrek (Frobenius)**.** *Če je $E \subset TX$ involutiven podvseženj ranga m, potem lahko X razslojimo na disjunktno unijo podmnogoterosti $M_\alpha \subset X$ dimenzije $\dim M_\alpha = m$, tako da je vsaka M_α integralna podmnogoterost svežnja E.*

Taka razslojitev mnogoterosti na paroma disjunktne podmnogoterosti konstantne dimenzije se imenuje *foliacija*. Posamezna podmnogoterost v foliaciji se imenuje *list* foliacije. Vsak list je vsebovan v nekem natanko določenem maksimalnem listu.

Lokalno: $\forall p \in X$ ima okolico U in $\varphi : U \xrightarrow{\approx} U' \subset \mathbb{R}^n$ karta, tako da je $d\varphi_x(E_x) = \mathbb{R}^m \times \{0\}^d$.
Razslojitev: U je disjunktna unija nivojnih ploskev

$$\varphi_{m+1}(x) = c_{m+1},\ \varphi_{m+2}(x) = c_{m+2}, \dots \varphi_n(x) = c_n,$$

kjer so $c_{m+1}, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ realna števila.

Dokaz. Naj bo $p \in X$. Gremo v lokalne koordinate, $p = 0 \in \mathbb{R}^n$. $V_1(x), \dots, V_m(x)$ vektorska polja v okolici $x = 0$, ki napenjajo E_x. Z linearno zamenjavo koordinat v $\mathbb{R}^n$ dosežemo $V_j(0) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_0$, $j = 1, \dots, m$. Naj bo

$$V_j(x) = \sum_{l=1}^{n} a_{jl}(x) \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Za levi $m \times m$ minor matrike koeficientov velja $\det(a_{jl})_{j,l}^m \neq 0$ na neki okolici $x = 0$ (v točki $x = 0$ je to ravno identična matrika). Pomnožimo matriko koeficientov $(a_{jl})_{j=1,\dots,m}^{l=1,\dots,n}$ z leve z matriko $(a_{jl})_{j,l=1,\dots,m}^{-1}$. Dobimo matriko koeficientov oblike

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & 1 & \end{array}\right]$$

Involutivnost se pri prehodu na novo bazo ohranja. Torej obstajajo polja oblike

$$V_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{l=m+1}^{n} a_{jl}(x) \frac{\partial}{\partial x_l}, \quad j = 1, \dots, m,$$

ki generirajo E v neki okolici $0 \in \mathbb{R}^n$.
Ker je E involutiven, je komutator $[V_j, V_k]$ linearna kombinacija polj $V_1, \dots, V_m$.
Preprost račun pokaže, da je $[V_j, V_k]$ linearna kombinacija polj $\frac{\partial}{\partial x_l}$, $l = m+1, \dots, m$.
Od tod sledi z elementarno linearno algebro, da je

$$[V_j, V_k] = 0, \quad j, k = 1, \dots, m.$$

Zato obstaja zamenjava difeomorfizem v okolici 0, ki preslika V_j v $\frac{\partial}{\partial x_j}$ za $j = 1, \dots, m$. S tem dobimo lokalne razlojitve.
Globalno razslojitev dobimo s topolovškimi argumenti (glej npr. knjigo Abraham, Marsden, Ratiu ali pa Boothby). □

Primer. $\mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$. Naj bo $E \subset T\mathbb{R}^3 \approx \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ podsveženj ranga 2.
Lokalno je E določen z dvema linearno neodvisnima vektorskima prostoroma V, W.
Kot v dokazu Frobeniusovega izreka:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\partial}{\partial x} + a(x,y,z) \frac{\partial}{\partial z} \\ W &= \frac{\partial}{\partial y} + b(x,y,z) \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Integralne ploskve so oblike $z = f(x, y)$. Ploskev parametriziramo $(x, y) \to (x, y, f(x, y))$. Izračunamo odvoda:

$$\begin{aligned} \text{odvod po } x: &\quad \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} \\ \text{odvod po } y: &\quad \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Ker polji V in W generirata E, vidimo, da je ta ploskev integralna ploskev svežnja E natanko tedaj, ko je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x, y, f(x)), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b(x, y, f(x)).$$

Ker je $f \in \mathcal{C}^2$ sta druga odvoda enaka.

$$\begin{gathered} f_{xy} = a_y + a_z f_y = a_y + a_z b \\ f_{yx} = b_x + b_z f_x = b_x + b_z a \\ f_{xy} - f_{yx} = a_y - b_x + a_z b - b_z a \equiv 0 \end{gathered}$$

Komutator:

$$[V, W] = \big(b_x + ab_z - a_y - ba_z\big)\frac{\partial}{\partial z} = (f_{yx} - f_{xy})\frac{\partial}{\partial z}$$

Ta račun diretno pokaže, zakaj polji V in W komutirata vzdolž vsake integralne ploskve.

II.6 Liejeva vrsta toka vektorskega polja

Naj bo V vektorsko polje in φ_t njegov tok. Naj bo f gladka funkcija vzdolž tokovnice $\varphi_t(x)$.

$$t \mapsto f(\varphi_t(x)) \overset{Taylor}{=} f(x) + V_x(f) \cdot t + \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} f(\varphi_t(x))\frac{t^2}{2} + \ldots$$

$$\frac{d}{dt} f(\varphi_t(x)) = df(\varphi_t(x))\frac{d\varphi_t(x)}{dt} = df_{\varphi_t(x)} V_{\varphi_t(x)} = V(f)(\varphi_t(x))$$

Če f nadomestimo z $V(f)$ dobimo:

$$\frac{d^2}{dt^2} f(\varphi_t(x)) = \frac{d}{dt} V(f)(\varphi_t(x)) = V(V(f))(\varphi_t(x)) = V^2(f)(\varphi_t(x))$$

To je diferencialni operator drugega reda.

$$V = \sum_{j=1}^n a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad V(f) = \sum_{j=1}^n a_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$V(Vf) = \sum_{j,k=1}^n a_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

$$\frac{d^k}{dt^k} f(\varphi_t(x)) = V^k(f)(\varphi_t(x)).$$

Torej:

$$f(\varphi_t(x)) = f(x) + V(f)(x)\, t + V^2(f)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots + V^k(f)(x)\frac{t^k}{k!} + o(t^k).$$

Uporabimo to formulo v primeru, ko je $V = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$, $f = x_j$ (j-ta koordinata), $\varphi_t(x) = (\varphi_{t,1}(x), \ldots, \varphi_{t,n}(x))$.

$$x_j \circ \varphi_t(x) = \varphi_{t,j}(x) = x_j + a_j(x)\, t + V(a_j)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots + V^{k-1}(a_j)(x)\frac{t^k}{k!} + o(t^k),$$

kjer smo uporabili

$$V(x_j) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = a_j(x).$$

Liejeva vrsta toka je

$$\varphi_t(x) = x + V(x)t + V(a)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots + V^{k-1}(a)(x)\frac{t^k}{k!} + o(t^k).$$

Še en način, kako pridemo do komutatorja: Naj bo še W vektorsko polje in ψ_s njegov tok.

$$W = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \psi_s(x) = s + sb(x) + \frac{s^2}{2}W(b)(x) + \ldots$$

$$\begin{aligned}
\psi_s(\varphi_t(x)) &= \psi_s(x + a(x)t + V(a)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots) \\
&= x + a(x)t + V(a)(x)\frac{t^2}{2} + \ldots + sb(x + a(x)t + \ldots) + \frac{s^2}{2}W(b)(x + a(x)t + \ldots) + \ldots \\
&= x + ta(x) + sb(x) + sb(x)a(x)t + \ldots + o(t^2, s^2)
\end{aligned}$$

Torej:

$$\begin{aligned}
\psi_s(\varphi_t(x)) &= x + ta(x) + sb(x) + stV(b)(x) + o(t^2, s^2) \\
\varphi_t(\psi_s(x)) &= x + ta(x) + sb(x) + stW(a)(x) + o(t^2, s^2)
\end{aligned}$$

Razlika:

$$\psi_s(\varphi_t(x)) - \varphi_t(\psi_s(x)) = st\big[V(b)(x) - W(a)(x)\big] + o(t^2, s^2) = st[V, W](x) + o(t^2, s^2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}(\psi_s\varphi_t(x) - \varphi_t\psi_s(x))\bigg|_{s=t=0} = [V, W](x)$$

Domača naloga: Dokaži

$$[V, W](x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi_{-\sqrt{t}} \circ \varphi_{-\sqrt{t}} \circ \psi_{\sqrt{t}} \circ \varphi_{\sqrt{t}}(x).$$

Če $\sqrt{t}$ nadomestimo z $\mathrm{sign}(t)\sqrt{|t|}$, potem lahko vzamemo dvostranski odvod.

Lema (Grönwall)**.** *Naj bosta $f, g\colon [a, b) \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ zvezni funkciji. Denimo, da velja neenakost*

$$F(t) \leq A + \int_a^t f(s)g(s)ds =: h(t)$$

za neko število $A \geq 0$ in za vsak $t \in [a, b)$. Potem velja

$$f(t) \leq A \exp\left(\int_a^t g(s)\, ds\right), \quad t \in [a, b).$$

Poseben primer: $g \equiv B \in \mathbb{R}$; če $f(t) \leq A + \int_a^t Bf(s)ds \Rightarrow f(t) \leq Ae^{B(t-a)}$.

Dokaz. Oglejmo si najprej primer $A > 0$.

$$\dot{h}(t) = f(t)g(t) \leq h(t)g(t)$$

$$\frac{\dot{h}(t)}{h(t)} \leq g(t) \Longrightarrow \ln h(t) - \ln A \leq \int_a^t g(s)ds \Longrightarrow h(t) \leq A \exp\left(\int_a^t g(s)ds\right).$$

Z limitnim prehodom $A \searrow 0$ vidimo, da velja tudi za $A = 0$. □

Izrek. *Denimo, da je $V = \sum a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ Lipschitzovo vektorsko polje z Lipschitzovo kontanto B na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:*

$$|a(x) - a(y)| \leq B|x - y|$$

Potem za $\forall x, y \in \Omega$, $\forall t \geq 0$, za katere je tok $\varphi_s(x)$, $\varphi_s(y)$ definiran na $s \in [0, t]$ in leži v Ω, velja:

$$|\varphi_t(x) - \varphi_t(y)| \leq e^{Bt}|x - y|$$

Dokaz. Fiksiramo $x, y \in \Omega$.

$$f(t) \overset{def}{=} |\varphi_t(x) - \varphi_t(y)|$$

$$\varphi_t(x) = \underbrace{\varphi_0(x)}_{=x} + \int_0^t \frac{d}{ds}\varphi_s(x)ds = x + \int_0^t a(\varphi_s(x))\, ds$$

$$\varphi_t(y) = y + \int_0^t a(\varphi_s(y))ds$$

$$\begin{aligned}
f(t) = |\varphi_t(x) - \varphi_t(y)| &\leq |x - y| + \int_0^t |a(\varphi_s(x)) - a(\varphi_s(y))|ds \\
&\leq |x - y| + \int_0^t B|\varphi_s(x) - \varphi_s(y)|ds \\
&= |x - y| + \int_0^t Bf(s)ds
\end{aligned}$$

Funkcija f zadošča predpostavki Grönwallove leme z $A = |x - y|$ in $B = g$.

Sledi $f(t) \leq |x - y|e^{Bt}$. □

Opomba. *Lema velja tudi za negativen čas $t < 0$. Takrat pišemo $e^{B|t|}|x - y|$.*

II.7 Aproksimacija toka s pomočjo algoritma

Vprašanje: Ali lahko tok $\varphi_t(x)$ vektorskega polja približno izračunamo s kakšno iterativno metodo?

Definicija. *Naj bo* $V = \sum a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$ *vektorsko polje na odprti množici* $U \subset \mathbb{R}^n$ *in* $a(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))$. *Naj bo* Ω *odprta množica v* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*, tako da je* $U \times \{0\} \subset \Omega$. *Preslikava* $A \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *razreda* $\mathcal{C}^1$*, ki zadošča pogojema*

$$A(x,0) = x, \quad \frac{\partial A}{\partial t}(x,0) = a(x), \quad x \in U,$$

se imenuje algoritem *za polje* V.

Opomba: Iz definicije sledi $A(x,t) = x + ta(x) + o(t)$ za vsak algoritem. Najpreprostejši algoritem je kar preslikava $(x,t) \mapsto x + ta(x)$, ki je linearna v t.

Izrek (Abraham, Marsden, Ratiu)**.** *Naj bo* V *Lipschitzovo vektorsko polje na domeni* $D \subset \mathbb{R}^n$ *s tokom* φ_t. *Naj bo* $\Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *fundamentalna domena toka (to je največja domena toka). Če je* A *nek algoritem za polje* V *(*A *je definiran v neki odprti okolici množice* $D \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$*), potem je za vsako točko* $(x,t) \in \Omega$*,* $t \geq 0$*, preslikava*

$$A_{\frac{t}{N}}^{(N)} \stackrel{def}{=} \underbrace{A_{\frac{t}{N}} \circ \ldots \circ A_{\frac{t}{N}}}_{N\text{-ti iterat}}$$

definirana v okolici točke x *za vse dovolj velike* $N >> 0$ *in velja*

$$\varphi_t(x) = \lim_{N \to \infty} A_{\frac{t}{N}}^{(N)}(x)$$

Konvergenca je enakomerna na kompaktih v Ω.

V dokazu uporabimo Taylorjev razvoj toka (do linearnega člena) in oceno napake s pomočjo Grönwallove leme ali prejšnjega izreka.

Primer. Preslikava

$$A(x,t) = x + ta(x) + tb(x)$$

je algoritem za vsoto $V + W$ vektorskih polj $V = \sum a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$, $W = \sum b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Naj bo ϕ_t tok polja V in ψ_t tok polja W. Tedaj je tudi preslikava

$$A(x,t) = \psi_t(\varphi_t(x)) = x + ta(x) + tb(x) + o(t)$$

algoritem za vsoto polj $V + W$. Odtod sledi, da je tok θ_t vsote $V + W$ enak

$$\theta_t = \lim_{N \to \infty} \left(\psi_{\frac{t}{N}} \circ \varphi_{\frac{t}{N}}\right)^{(N)}.$$

III Vektorski svežnji

III.1 Definicija in primeri

Naj bosta E in X $\mathcal{C}^r$ mnogoterosti in $\pi\colon E \to X$ surjektivna $\mathcal{C}^r$ preslikava.

Definicija. *Projekcija $\pi\colon E \to X$ je (realen) vektorski sveženj ranga m in razreda $\mathcal{C}^r$, če ima vsako vlakno $E_x = p^{-1}(x)$ strukturo m-dimenzionalnega vektorskega prostora ($E_x \approx \mathbb{R}^m$) in je sveženj lokalno trivialen: $\forall x_0 \in X\ \exists U^{okolica} \subset X$ in $\mathcal{C}^r$ difeomorfizem $\theta\colon E|_U \to U \times \mathbb{R}^m$:*

$$\begin{tikzcd} \theta\colon \pi^{-1}(U) = E|_U \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dr, "\pi"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & U \times \mathbb{R}^m \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

tako da je za vsak $x \in U$ preslikava $\theta_x\colon E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{pr_2} \mathbb{R}^m$ linearni izomorfizem.
Če $\mathbb{R}^m$ zamenjamo s $\mathbb{C}^m$, dobimo kompleksni vektorski sveženj *ranga m nad X.*

Opomba: Iz definicije sledi, da so vektorske operacije na vlaknih (seštevanje in produkt s skalarji) gladko odvisne od bazne točke $x \in U$.

Mnogoterost X se imenuje *bazni prostor* ali *baza* svežnja;
mnogoterost E je *totalni prostor* svežja;
za vsako točko $x \in X$ je $E_x = \pi^{-1}(x)$ *vlakno* svežnja nad x.

Sveženjski atlas na E: $\mathcal{E} = \{(U_\alpha, \theta_\alpha)\colon \alpha \in A\}$, $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, $(\theta_\alpha, U_\alpha)$ je sveženjska karta na E. Prehodne preslikave: $U_\alpha \cap U_\beta = U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$.

$$\begin{tikzcd} & E|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[dl, "\theta_\alpha"'] \arrow[dr, "\theta_\beta"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m & {} & U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^m \arrow[ll, "\theta_{\alpha\beta}"] \end{tikzcd}$$

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1}, \qquad \theta_{\alpha\beta}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)\, v)$$

$$U_{\alpha\beta} \ni x \mapsto g_{\alpha\beta}(x) \in GL_m(\mathbb{R}) \text{ gladka } m \times n \text{ matrična funkcija}$$

Družina funkcij $g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to GL_m(\mathbb{R})$ je *1-kocikel*, kar pomeni, da zadošča pogojem:

1^o $g_{\alpha\alpha} = I =$ identična matrika

2^o $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\alpha} = I$

3^o $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\gamma\alpha} = I$

Dva sveženjska atlasa na E sta ekvivalentna, če je njuna unija spet sveženjski atlas. Struktura vektorskega svežnja na E je določena z ekvivalenčnim razredom atlasa.

Izrek. *Za vsak 1-kocikel $(g_{\alpha\beta})$ na odprtem pokritju $\mathcal{U} = \{U_\alpha\colon \alpha \in A\}$ gladke mnogoterosti X, ki je podan z gladkimi preslikavami $g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \mapsto GL_m(\mathbb{R})$, obstaja gladek vektorski sveženj $E \xrightarrow{\pi} X$ s sveženjskim atlasom $\mathcal{E} = \{(U_\alpha, \theta_\alpha)\colon \alpha \in A\}$ in s prehodnimi preslikavami*

$$\theta_{\alpha\beta}(x, v) = \big(x, g_{\alpha\beta}(x)\, v\big), \quad x \in U_{\alpha\beta},\ v \in \mathbb{R}^m.$$

Dokaz. (Ideja)

$$E = \bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^m /_\sim$$

$$U_\beta \times \mathbb{R}^m \ni (x, v) \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)\, v) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^m$$

Naredimo natančno te identifikacije $\forall \alpha, \beta \in A$.

Preveri: kocikelni pogoj zagotavlja, da je $\sim$ res ekvivalenčna relacija in da je E Hausdorffov.

Sveženjske karte: $U_\alpha \times \mathbb{R}^m \underset{\theta_\alpha}{\overset{\approx}{\rightleftarrows}} E|_{U_\alpha}$.

Preveri, da velja $\theta_{\alpha\beta}(x, v) = (x, g_{\alpha\beta}(x)\, v)$. □

III.2 Prerezi vektorskega svežnja

Naj bo $\pi\colon E \to X$ vektorski sveženj razreda $\mathcal{C}^r$.

Definicija. Prerez *vektorskega svežnja $\pi\colon E \to X$ je preslikava $f\colon X \to E$, ki zadošča pogoju*

$$\pi \circ f = \mathrm{Id}_X \,.$$

Ekvivalentno, za vsak $x \in X$ je $f(x) \in E_x = \pi^{-1}(x)$ točka v pripadajočem vlaknu nad x.
Prerez je razred $\mathcal{C}^r$, če je $\mathcal{C}^r$ preslikava mnogoterosti X v mnogoterost E. (To ima smisel v primeru ko je sveženj $\pi\colon E \to X$ razreda $\mathcal{C}^r$.)
Prerez $0\colon X \to E$, ki vsaki točki $x \in X$ priredi ničelni element $0_x \in E_x$ vektorskega prostora E_x, se imenuje ničelni prerez.

S pomočjo ničelnega prereza lahko bazo X identificiramo s podmnožico $X_0 = \{0_x \colon x \in X\} \subset E$, ki je prav tako imenuje ničelni prerez.

Prostori prerezov in operacije:
Množico vseh zveznih prerezov $X \to E$ označimo z $\Gamma(X, E)$;
$\Gamma^r(X, E)$ označije množico vseh prerezov razreda $\mathcal{C}^r$.
Za poljubna prereza $f, g \in \Gamma(X, E)$ definiramo vsoto $f + g \in \Gamma(X, E)$ kot vsoto po točkah:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \in E_x \quad \text{(vsota na vlaknu } E_x\text{)}.$$

Za vsak prerez $f \in \Gamma(X, E)$ in vsako funkcijo $\chi\colon X \to \mathbb{R}$ definiramo prerez $\chi f \in \Gamma(X, E)$ s predpisom

$$(\chi f)(x) = \chi(x) f(x) \in E_x.$$

Torej je $\Gamma(X, E)$ vektorski prostor in modul nad kolobarjem $\mathcal{C}(X)$ zveznih funkcij na X.
Če je $E \to X$ razreda $\mathcal{C}^r$, je $\Gamma^r(X, E)$ modul nad kolobarjem $\mathcal{C}^r(X)$ funkcij razreda $\mathcal{C}^r$.

Prerezi trivialnega svežnja $E = X \times \mathbb{R}^n$ so oblike $f(x) = (x, g(x))$, kjer je $g\colon X \to \mathbb{R}^n$ preslikava baze X v vlakno $\mathbb{R}^n$. Na ta način prereze trivialnega svežnja pogosto kar identificiramo s preslikavami baze v vlakno:

$$\Gamma(X, X \times \mathbb{R}^n) \cong \mathcal{C}(X, \mathbb{R}^n); \quad \Gamma^r(X, X \times \mathbb{R}^n) \cong \mathcal{C}^r(X, \mathbb{R}^n).$$

Prerezi v lokalni kartah: Naj bo $\mathcal{E} = \{(U_\alpha, \theta_\alpha) \colon \alpha \in A\}$ sveženjski atlas na E, kjer je $\theta_\alpha \colon E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, s prehodnimi preslikavami

$$\theta_{\alpha\beta} = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1}, \qquad \theta_{\alpha\beta}(x, v) = \big(x, g_{\alpha\beta}(x)\, v\big).$$

V lokalnih karti $E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\cong} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ je prerez f podan s funkcijo $f_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n$. Kompatibilitetni pogoji nam povedo:

$$f_\alpha(x) = g_{\alpha\beta}(x) f_\beta(x) \quad \forall x \in U_{\alpha\beta}.$$

Velja tudi obratno: Vsaka kolekcija preslikav $f_\alpha \colon U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ $(\alpha \in A)$, ki zadošča zgornjim pogojem, določa prerez $f \colon X \to E$.

Če je f v nekem atlasu določen s kolekcijo funkcij (f_α) in je prerez f' določen s kolekcijo (f'_α), je vsota $f + f'$ določena s kolekcijo $(f_\alpha + f'_\alpha)$ in je χf določen s kolekcijo (χf_α).

III.3 Morfizmi vektorskih svežnjev

Nad isto bazo X: Naj bosta $\pi \colon E \to X$, $\pi' \colon E' \to X$ $\mathcal{C}^r$ vektorska sveženja nad X.
Morfizem razreda $\mathcal{C}^r$ prvega svežnja E v drug sveženj E' je $\mathcal{C}^r$ preslikava $\Phi \colon E \to E'$, ki zadošča pogoju $\pi' \circ \Phi = \pi$, to je, naslednji diagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \arrow[r, hook] & E \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & E' & \mathbb{R}^{m'} \arrow[l, hook'] \\
& & X & & \arrow[from=1-4, to=2-3, "\pi'"]
\end{tikzcd}$$

in je za vsak $x \in X$ preslikava $\Phi_x \colon E_x \to E'_x$ linearna na vlaknih.

Jedro in slika morfizma:

$$\begin{aligned}
\ker \Phi &= \{v \in E_x \colon x \in X,\ \Phi_x(v) = 0_x \in E'_x\} \subset E \\
\operatorname{im} \Phi &= \Phi(E) \subset E'.
\end{aligned}$$

Očitno so vlakna $\ker \Phi$ vektorski podprostori v vlaknih svežnja E, vlakna $\operatorname{im} \Phi$ pa so vektorski podprostori v vlaknih svežnja E'. Velja

$$\dim(\ker \Phi_x) + \dim(\operatorname{im} \Phi_x) = m = \operatorname{rang} E, \quad x \in X,$$

toda posamezni dimenziji sta lahko odvisni od točke x.

Vsak morfizem je v lokalnih sveženjskih kartah podan z množenjem z matrično funkcijo.

$$\begin{tikzcd}
E|_U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\theta"'] & E'|_U \arrow[d, "\theta'"] \\
U \times \mathbb{R}^m \arrow[r, "\tilde{\Phi}", "\theta' \circ \Phi \circ \theta^{-1}"'] & U \times \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

$$\tilde{\Phi}(x,v) = (x, \varphi(x)\, v), \quad U \ni x \mapsto \varphi(x) \in \mathbb{R}^{m\times m} \ m\times m\text{-dimenzionalna matrika}$$

Vprašanje: kdaj je $\ker\Phi$ podsveženj v E? Kdaj je $\operatorname{im}\Phi$ podsveženj v E?

Odgovor: natanko tedaj, ko so vlakna konstantne dimenzije. (Glej vaje.)

Morfizmi vektorskih svežnjev v lokalnih sveženjskih kartah:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{(U_\alpha, \theta_\alpha) \colon \alpha \in A\} && \text{sveženjski atlas na } E \\ \mathcal{E}' &= \{(U_\alpha, \theta'_\alpha) \colon \alpha \in A\} && \text{sveženjski atlas na } E' \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} E|_{U_\alpha} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\theta_\alpha"', "\approx"] & E'|_{U_\alpha} \arrow[d, "\theta'_\alpha"] \\ U_\alpha \times \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed, "\tilde{\Phi}"'] & U_\alpha \times \mathbb{R}^{n'} \end{tikzcd}$$

$$\tilde{\Phi}(x,v) = (x, \varphi_\alpha(x)v)$$

$$\varphi_\alpha(x) = \text{ matrična } n\times n' \text{ funkcija za } x \in U_\alpha$$

Φ je določena s kolekcijo preslikav

$$\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to M^{n'\times n} \quad \forall \alpha \in A$$

Kdaj taka kolekcija $\{\varphi_\alpha\}$ določa morfizem $\Phi\colon E \to E'$?
Naj bo U_β neka druga množica našega pokritja, $\varphi_\beta \colon U_\beta \to M^{n'\times n}$. Zanima nas zveza med φ_α in φ_β na $U_{\alpha\beta}$. V E:

$$\begin{tikzcd} (x,v) \arrow[d, "\approx"', "\theta_{\alpha\beta}=\theta_\alpha\circ\theta_\beta^{-1}"] & \in U_\beta \times \mathbb{R}^n, & x \in U_{\alpha\beta} \\ (x, g_{\alpha\beta}(x)v) & \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n & \end{tikzcd}$$

$$g_{\alpha\beta} \colon U_{\alpha\beta} \mapsto GL_n(\mathbb{R}) \qquad \text{(1-kocikel prehodnih preslikav)}$$

Preslikamo to točko s Φ. V karti U_β je to

$$U_\beta \times \mathbb{R}^n \ni (x,v) \mapsto (x, \varphi_\beta(x)v) \in U_\beta \times \mathbb{R}^{n'}.$$

Ta vektor ustreza vektorju $(x, g'_{\alpha\beta}(x)\varphi_\beta(x)v)$ v karti $U_\alpha \times \mathbb{R}^{n'}$ za E'. Zaradi identifikacij v svežnju je to isti vektor kot

$$(x,v) \xmapsto[U_\alpha \text{ na } E]{\text{prehod v karto}} (x, g_{\alpha\beta}(x)v) \xmapsto[\text{v karti } U_\alpha]{\Phi} (x, \varphi_\alpha(x) g_{\alpha\beta}(x)v)$$

Torej kolekcija matričnih funkcija $\varphi_\alpha \colon U_\alpha \to M^{n'\times n}$ določa morfizem $\Phi\colon E \to E'$ (glede na izbrani par atlasov na E, E') natanko tedaj, ko velja

$$g'_{\alpha\beta}(x)\varphi_\beta(x) = \varphi_\alpha(x) g_{\alpha\beta}(x), \quad \forall x \in U_{\alpha\beta},\ \forall \alpha, \beta \in A.$$

$$\begin{tikzcd}
U_{\alpha\beta}\times\mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi_\alpha", "(x,v)\mapsto(x,\varphi_\alpha(x)v)"'] & U_{\alpha\beta}\times\mathbb{R}^{n'} \\
E|_{U_{\alpha\beta}} \arrow[u, "\theta_\alpha"] \arrow[d, "\theta_\beta"'] \arrow[r, "\Phi"] & E'|_{U'_{\alpha\beta}} \arrow[u, "\theta_\alpha"'] \arrow[d, "\theta'_\beta"] \\
U_{\alpha\beta}\times\mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi_\beta"] \arrow[uu, bend left=60, "\theta_{\alpha\beta}"] & U_{\alpha\beta}\times\mathbb{R}^{n'} \arrow[uu, bend right=60, "\theta'_{\alpha\beta}"']
\end{tikzcd}$$

Morfizem Φ je izomorfizem natanko tedaj, ko je $n = n'$ in $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \mapsto GL_n(\mathbb{R})$ ter

$$g'_{\alpha\beta}\varphi_\beta = \varphi_\alpha g_{\alpha\beta} \Leftrightarrow g'_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha g_{\alpha\beta}\varphi_\beta^{-1}.$$

Od tod vidimo, da 1-kocikla $(g_{\alpha\beta})$ in $(g'_{\alpha\beta})$ (na istem pokritju) določata "isti" sveženj do izomorfizma natančno natanko tedaj, ko obstaja 0-koveriga $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \mapsto GL_n(\mathbb{R})$, tako da velja $g'_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha g_{\alpha\beta}\varphi_\beta^{-1}$. Včasih označimo $d' = g\Box\varphi$ ("twisting cocycle g by the cochain φ").

Definiramo kohomološko grupo $H^1(\mathcal{U}, GL_n(\mathbb{R}))$ kot grupo ekvivalenčnih razredov 1-kociklov $g = (g_{\alpha\beta})$ na $\mathcal{U}$, z vrednostmi v $GL_n(\mathbb{R})$, po relaciji $g \sim g' \Leftrightarrow g' = g\Box\varphi$ za neko 0-koverigo φ. $H^1(\mathcal{U}, GL_n(\mathbb{R}))$ je prostor izomorfnostnih razredov vektorskih svežnjev ranga n na X, ki so trivialni nad vsako množico $U_\alpha \in \mathcal{U}$. Imenuje se *prva Čechova kohomološka grupa na $\mathcal{U}$ s koeficienti v $GL_n(\mathbb{R})$.* Podobno je $H^1(\mathcal{U}, GL_n(\mathbb{C}))$ prostor izomorfnostnih razredov kompleksnih vektorskih svežnjev nad X.
Prva kohomološka grupa mnogoterosti X s koeficienti v $GL_n(\mathbb{C})$ je definirana kot direktna limita

$$H^1(X, GL_n(\mathbb{R})) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, GL_n(\mathbb{R})),$$

kjer opazujemo prehode na finejša pokritja. Tega pojma ne bomo natančneje definirali (glej literatiro iz kohomološke algebre).
Brez dokaza navedemo naslednji izrek.

Izrek. *Če je mnogoterost X kontraktibilna, potem je vsak vektorski sveženj $E \to X$ trivialen, to je izomorfen produktnemu svežnju $X \times \mathbb{R}^n$.*

Primer. $X = S^n = n$-sfera $= U^+ \cup U^-$, kjer sta $U^\pm$ odprti hemisferi, ki se prekrivata vzdolž ekvatorja. Vsaka od množic $U^\pm$ je difeomorfna odprti n-krogli, torej tudi $\mathbb{R}^n$.
$U^+ \cap U^- \approx S^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$
$E \to X$ vektorski sveženj ranga m, $E|_{U^+} \approx U^+ \times \mathbb{R}^m$, $E|_{U^-} \approx U^- \times \mathbb{R}^m$.
E določen s prehodno preslikavo g:

$$g\colon U^+ \cap U^- \approx S^{n-1} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to GL_m(\mathbb{R})$$

Dejansko je določen že s homotopnim razredom te preslikave, torej s preslikavo $S^{n-1} \to GL_m(\mathbb{R})$. V posebnem primeru $n = 2, m = 2$: $S^1 \to GL_2(\mathbb{R})$: homotopni razredi preslikav $S^1 \to GL_2(\mathbb{R})$ sestavljajo prvo fundamentalno grupo $\pi_1(GL_2(\mathbb{R})) \approx \pi_1(O(2)) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Vprašanje: kateremu številu pripada tangentni svežen TS^2 sfere?

Primer. *Univerzalni sveženj.*
$G_{k,n}$ mnogoterost vseh k-dimenzionalnih realnih vektorskih podprostorov v $\mathbb{R}^n$
$G_{k,n}$ mnogoterost vseh k-dimenzionalnih kompleksnih vektorskih podprostorov v $\mathbb{C}^n$

$$U_{k,n} = \{(\lambda, v) \in G_{k,n} \times \mathbb{R}^n \colon v \in \lambda\} \subset G_{k,n} \times \mathbb{R}^n$$

Naloga: pokaži, da je $U_{k,n}$ realno analitičen vektorski podsveženj v $G_{k,n} \times \mathbb{R}^n$.
V kompleksnem: $U_{k,n}(\mathbb{C}) \to G_{k,n}(\mathbb{C})$ holomorfen vektorski podsveženj v $G_{k,n}(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$.
Poseben primer: $G_{1,n+1} = \mathbb{RP}^n$, $G_{1,n+1} = \mathbb{CP}^n$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, hook] & U_{1,n+1} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{RP}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, hook] & U_{1,n+1} \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{CP}^n \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} U_{1,n+1}(\mathbb{C}) &= \{([z_0\colon \dots \colon z_n], (v_0, \dots, v_n)) \in \mathbb{CP}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \colon z_i v_j = z_j v_i \ \forall i, j\} \\ &= \{[z_0\colon \dots \colon z_n], (z_0, \dots, z_n)) \colon (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_*^{n+1}\} \cup (\text{ničelni prerez}) \end{aligned}$$

Naloga: poišči trivializacijo $U_{k,n}|_{U_j} \approx U_j \times \mathbb{C}$ nad množico

$$U_j = \{[z_0\colon \dots \colon z_n] \in \mathbb{CP}^n, z_j \neq 0\} \approx \mathbb{C}^n$$

in prehodne preslikave.

III.4 Podsvežnji, kvocientni svežnji, eksaktna zaporedja, dualni sveženj

Naj bo $E \to X$ vektorski sveženj ranga n nad X. Izberimo število $m \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Definicija. *Podmnožica $E' \subset E$ je* vektorski podsveženj ranga m *svežnja E, če je za vsako točko $x \in X$ množica E_x k-dimenzionalen vektorski podprostor v E_x in je E'* lokalno trivialen *v naslednjem smislu: Za vsako točko $p \in X$ obstaja okolica $p \in U \subset X$ in sveženjska karta $\theta\colon E|_U \to U \times \mathbb{R}^n$, tako da velja*

$$\theta(E'|_U) = U \times (\mathbb{R}^m \times \{0\}^d), \quad n = m + d.$$

Vsaka taka sveženjska karta na E je *izbrana* glede na E'. Kolekcija vseh izbranih sveženjskih kart definira na E' strukturo vektorskega svežnja ranga m nad X.

Analogno definiramo pojem *kompleksnega vektorskega podsvežnja* v kompleksnem vektorskem svežnju.

Naj bo $E' \subset E$ vektorski podsveženj kot zgoraj.

Kvocientni sveženj $E/_{E'}$ je definiran takole:

$$E/_{E'} = \bigsqcup_{x \in X} E_x/_{E'_x}.$$

Če je θ izbrana sveženjska karta na $E|_U$ (glede na E'), potem θ inducira bijekcijo

$$(E/_{E'}|_U) \xrightarrow[\tilde\theta]{\approx} U \times \mathbb{R}^d = U \times \underbrace{\mathbb{R}^n/_{\mathbb{R}^m \times \{0\}^d}}_{\mathbb{R}^d}$$

Preslikavo $\tilde{\theta}$ vzamemo za sveženjsko karto na $E'' = E/_{E'}$.
Naloga: Preveri, da tako dobimo sveženjski atlas na E''.

Zaporedje morfizmov

$$0 \longrightarrow E' \overset{\text{inkl.}}{\underset{\iota}{\hookrightarrow}} E \overset{\text{kvoc.}}{\underset{\tau}{\longrightarrow}} E'' \longrightarrow 0$$

se imenuje *kratko eksaktno zaporedje morfizmov vektorskih sveženjev.* To pomeni, da je ι injektivna, τ surjektivna in $\ker\tau = \operatorname{im}\iota$.
Zaporedje morfizmov vektorskih sveženjev

$$\cdots \longrightarrow E_{k-1} \overset{\Phi_{k-1}}{\longrightarrow} E_k \overset{\Phi_k}{\longrightarrow} E_{k+1} \longrightarrow \ldots$$

je *kompleks*, če so jedra $\ker\Phi_k \subset E_k$ in slike $\operatorname{im}\Phi_{k-1} \subset E_k$ podsvežnji ($\Leftrightarrow$ rang $\Phi_{k,x}$ neodvisen od bazne točke $x \in X$) in če velja

$$\Phi_k \circ \Phi_{k-1} = 0 \Longleftrightarrow \operatorname{im}\Phi_{k-1} = \ker\Phi_k, \quad \forall k.$$

Zaporedje se imenuje *eksaktno*, če velja

$$\ker\Phi_k = \operatorname{im}\Phi_{k-1}, \quad \forall k.$$

Praktično vse "naravne" funktorje na kategoriji *Vec* vektorskih prostorov in linearnih preslikav lahko posplošimo na svežnje. Naj bo Φ nek kovarianten funktor na kategoriji *Vec*:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "l"] & \Phi(V) \arrow[d, "\Phi(l)"] \\ V' \arrow[r, squiggly] & \Phi(V) \end{tikzcd}$$

Pri kontravariantnem funktorju imamo obrnjene puščice $\uparrow$.
Denimo, da je $E \to X$ vektorski sveženj nad X. Definiramo prirejen sveženj

$$\Phi(E) \to X, \quad \Phi(E) = \bigsqcup_{x\in X} \Phi(E_x).$$

Na primer, vsakemu vektorskemu prostoru V priredimo njegov dualni prostor $V^* = \operatorname{Hom}(V, \mathbb{R})$ (prostor linearnih funkcionalov na V). To je kontravarianten funktor:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, squiggly] \arrow[d, "l"] & V^* \ni \lambda \circ l \\ V' \arrow[r, squiggly] & (V')^* \ni \lambda \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Dualni sveženj: $E^* = \bigsqcup_{x\in X} E_x^*$.
Vsaki sveženjski karti $\theta\colon E|_U \to U \times \mathbb{R}^n$ na E priredimo sveženjsko karto v E^*:

$$\theta^*\colon U \times (\mathbb{R}^n)^* = U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow E^*|_U$$

$\theta_x^*\colon \{x\} \times (\mathbb{R}^n)^* \overset{\approx}{\longrightarrow} E_x^*$ je dual preslikave $\theta_x\colon E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^n$.
Inverz $(\theta^*)^{-1}\colon E^*|_U \to U \times \mathbb{R}^n$ je sveženjska karta na E^*.

III.5 Kotangentni sveženj in diferencialne 1-forme

Kotangentni sveženj T^*X gladke mnogoterosti je dualni sveženj tangentnega svežnja TX:

$$T^*X = (TX)^* = \bigsqcup_{x \in X} T_x^*X$$

Modelni primer: $X = \mathbb{R}^n$. Elementi $T_0^*\mathbb{R}^n$ so linearni funkcionali $\lambda\colon T_0\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$T_0\mathbb{R}^n \ni v = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{R}$$

Vsaka gladka funkcija g v okolici točke 0 v $\mathbb{R}^n$ določa funkcional na $T_0\mathbb{R}^n$ s predpisom

$$v = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \longmapsto v(g) = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial g}{\partial x_j}(0) = dg_0 v.$$

Ta funkcional je torej diferencial dg_0 funkcije g v točki 0.
Če je $g(x) = x_k$, dobimo $\langle dx_k, v\rangle = v(x_k) = v_k$; torej

$$\langle dx_k, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k; \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Torej tvorijo diferenciali $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ koordinatnih funkcij bazo kotangentnega prostora $T_0^*\mathbb{R}^n$, ki je dualna standardni bazi $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ tangentnega prostora $T_0\mathbb{R}^n$.
Vsak element $\lambda \in T_0^*\mathbb{R}^n$ je oblike

$$\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j dx_j = d\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\right).$$

Diferencialne 1-forme. Prerezi kotangentnega svežnja se imenujejo diferencialne 1-forme. Na domeni $D \subset \mathbb{R}^n$ je vsaka 1-forma oblike

$$\alpha = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_j,$$

kjer so $a_j(x)$ funkcije na D.

Integral diferencialne 1-forme po poti $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ $(t \in [0,1])$ je

$$\int_\gamma \alpha = \int_0^1 \langle \alpha(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n a_j(\gamma(t))\dot x_j(t)\right) dt.$$

V klasični analizi je to krivuljni integral vektorskega polja $(a_1(x), \ldots, a_n(x))$.

Naj bo $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $p \in U$. Zanima nas ekspliciten izraz za dualno preslikavo

$$(df_p)^*\colon T_{f(p)}^*\mathbb{R}^m \longrightarrow T_p^*\mathbb{R}^n$$

diferenciala $df_p\colon T_p\mathbb{R}^n \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m$. Naj bo $\lambda \in T^*_{f(p)}\mathbb{R}^m$. Po definiciji dualne preslikave je

$$\langle f_p^*(\lambda), v\rangle = \langle \lambda, df_p\, v\rangle.$$

Uporabimo ta predpis na standardni bazi $\lambda = dy_k$, $v = \frac{\partial}{\partial x_i}$:

$$\left\langle f_p^*(dy_k), \frac{\partial}{\partial x_i}\right\rangle = \left\langle dy_k, df_p \frac{\partial}{\partial x_i}\right\rangle = \left\langle dy_k, \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\frac{\partial}{\partial y_j}\right\rangle = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(p).$$

Odtod sledi razvoj po bazi

$$f_p^*(dy_k) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(p)dx_i = (df_k)_p = d(y_k \circ f)_p, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Naj bo $\lambda = \sum \lambda_k dy_k = d(\sum \lambda_k y_k)$. (Vsak kovektor $\lambda \in T^*_{f(p)}\mathbb{R}^m$ je te oblike.)

$$f_p^*(\lambda) = \sum_{k=1}^m \lambda_k f_p^*(dy_k) = \sum_{k=1}^m \lambda_k d(y_k \circ f)_p = d\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k y_k \circ f\right)_p$$

Za linearno funkcijo $g = \sum_{k=1}^m \lambda_k y_k$ smo torej dokazali pravilo

$$f_p^*(dg) = d(g \circ f)_p.$$

Ker lahko vsako funkcijo g v okolici točke $f(p)$ zapišemo kot vsoto

$$g(y) = c + \sum_{k=1}^m \lambda_k y_k + o(|y - f(p)|)$$

za primerno izbrano konstanto c in je tedaj

$$dg_{f(p)} = d(\sum_{k=1}^m \lambda_k y_k),$$

sledi isto pravilo za vsako funkcijo. Situacijo povzamemo v naslednjem diagramu:

$$\begin{tikzcd}
f^*(g) = g \circ f \in \mathcal{C}^\infty_p \arrow[dd, bend right] & & g \in \mathcal{C}^\infty_{f(p)} \arrow[ll, "f^*"'] \arrow[dd, bend left] \\
T_p\mathbb{R}^n \arrow[rr, "df_p", "\text{dual zgornje}"'] & & T_{f(p)}\mathbb{R}^m \\
d(g \circ f)_p \in T_p^*\mathbb{R}^n & & T_p^*\mathbb{R}^m \arrow[ll, "f_p^*"']
\end{tikzcd}$$

Povlek diferencialne forme.
Naj bo $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n_x \to \mathbb{R}^m_y$ gladka preslikava in $\alpha = \sum\limits_{j=1}^m a_j(y)dy_j$ diferencialna forma na neki

domeni v $\mathbb{R}^m$, ki vsebuje $f(\Omega)$. Povlek $f^*\alpha$ je diferencialna 1-forma na Ω, ki je po točkah definirana s pomočjo zgoraj definirane preslikave $f_x^*\colon T^*_{f(x)}\mathbb{R}^m \to T^*_x\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
(f^*\alpha)(x) := f_x^*(\alpha(f(x))) = f_x^*\left(\sum_{j=1}^m a_j(f(x))dy_j\right) &= \sum_{j=1}^m a_j(f(x))f_x^*(dy_j) \\
&= \sum_{j=1}^m a_j(f(x))df_j(x) \\
&= \sum_{j=1}^m a_j(f(x))\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x)dx_k \\
&= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_j(f(x))\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right)dx_k
\end{aligned}$$

III.6 Direktna (Whitneyeva) vsota vektorskih svežnjev

Imejmo vektorska svežnja:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, hook] & E \arrow[d, "\pi"] \\
& X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^m \arrow[r, hook] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

Njuno direktno vsoto $E \oplus E'$ definiramo s predpisom

$$\begin{tikzcd}
E \oplus E' = \displaystyle\bigsqcup_{x\in X} E_x \oplus E'_x \arrow[d] \\
X
\end{tikzcd}$$

Torej je vsako vlakno $(E \oplus E')_x = E_x \oplus E'_x$ enako direktni vsoti vlaken E_x in E'_x.

Izberimo pokritje $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_\alpha$ mnogoterosti X, na katerem je E podan z 1-kociklom $g_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to GL_n(\mathbb{R})$ in je E' podan z 1-kociklom $g'_{\alpha\beta}\colon U_{\alpha\beta} \to GL_m(\mathbb{R})$. Potem je $E \oplus E'$ podan na $\mathcal{U}$ z 1-kociklom

$$\begin{bmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g'_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

Primer. Trivialen svežnej: $X \times \mathbb{R}^n = (X \times \mathbb{R}) \oplus (X \times \mathbb{R}) \oplus \ldots \oplus (X \times \mathbb{R})$.

Notranja direktna vsota.
Naj bosta $E', E'' \subset E$ komplementarna vektorska podsvežnja svežnja $E \to X$:

$$\forall x \in X: \quad E'_x + E''_x = E_x \quad \text{in} \quad E'_x \cap E''_x = \{0\}$$

Potem obstaja izomorfizem vektorskih svežnjev

$$\begin{aligned}
E' \oplus E'' &\xrightarrow{\approx} E \\
e'_x \oplus e''_x &\mapsto e'_x + e''_x \in E_x.
\end{aligned}$$

Dobimo kratko eksaktno zaporedje:

$$\begin{tikzcd} X \times \{0\} = 0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr] & E \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & E'' \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[l, bend right, "\psi"'] & 0 \\ & & X & & \end{tikzcd}$$

Trditev. $E \approx E' \oplus E''$

Dokaz. Konstruirali bomo homomorfizem vektorskih svežnjev $\psi\colon E'' \to E$, ki zadošča

$$\rho \circ \psi = \mathrm{Id}_{E''} \Rightarrow \psi \text{ je injektiven.}$$

Uporabimo particijo enote. Naj bo $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ pokritje X, tako da za vsak α obstaja karta $\varphi_\alpha\colon E_{U_\alpha} \xrightarrow{\approx} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, da velja

$$\varphi_\alpha(\tau(E')|_{U_\alpha}) = U_\alpha \times (\mathbb{R}^{n'} \times \{0\}^{n-n'}).$$

(Torej je φ_α izbrana sveženjska karta za podsveženj $\tau(E')$ svežnja E.) Naj bo $n' + n'' = n$. Definiramo

$$F_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}\left(U_\alpha \times (\{0\}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''})\right) \subset E|_{U_\alpha}.$$

To je podsveženj svežnja $E|_{U_\alpha}$, za katerega velja

$$\tau(E')|_{U_\alpha} \oplus F_\alpha = E|_{U_\alpha}.$$

Zožitev $\rho\colon F_\alpha \xrightarrow{\approx} E''|_{U_\alpha}$ je očitno izomorfizem. Definiramo $\psi_\alpha := (\rho|_{F_\alpha})^{-1}$.
Sedaj izberemo particijo enote χ_α podrejeno pokritju $\{U_\alpha\}$:

$$\chi_\alpha\colon X \to [0,1], \quad \operatorname{supp}\chi_\alpha \subset U_\alpha, \quad \sum_\alpha \chi_\alpha = 1$$

Definiramo preslikavo $\psi\colon E'' \to E$ s predpisom

$$\psi = \sum_\alpha \chi_\alpha \psi_\alpha, \qquad \psi(e''_x) = \sum_\alpha \chi_\alpha(x)\psi_\alpha(e''_x) \quad (e''_x \in E''_x).$$

Ker je na vsakem vlaknu linearna kombinacija linearnih preslikav, je linearna. Poleg tega je

$$\rho(\psi(e''_x)) = \sum_\alpha \chi_\alpha(x)\rho(\psi_\alpha(e''_x)) = e''_x,$$

torej je $\rho \circ \psi = \mathrm{Id}|_{E''}$.
Drugi dokaz: s pomočjo particije enote konstruiramo na E polje skalarnih produktov na vlaknih E_x:

$$E_x \times E_x \xrightarrow{g_x} \mathbb{R}, \quad (v,w) \mapsto g_x(v,w)$$

V lokalni karti $E|_{U_\alpha} \approx U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ vzamemo standardni evklidski skalarni produkt. Polje skalarnih produktov na vsem svežnju definiramo s predpisom

$$g = \sum_\alpha \chi_\alpha g_\alpha$$

kjer je $\{\chi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ particija enote kot zgoraj.
Naj bo $F \subset E$ ortogonalni komplement podsvežnja $\tau(E') \subset E$. Potem je zožitev $\rho_F : F \to E''$ bijektivna, torej njen inverz $\psi = (\rho_F)^{-1} : E'' \to E$ zadošča $\rho \circ \tau = \mathrm{id}\,|_{E''}$.

Sedaj imamo v E dva vektorska podsvežnja $\tau(E') \approx E'$ in $\psi(E'') \approx E''$. Ker je $\ker \rho = \tau(E')$ in je $\rho \colon \psi(E'') \to E''$ izomorfizem, sledi, da sta ta dva podsvežnja komplementarna. Torej je

$$E \approx \tau(E') \oplus \rho(E'') \approx E' \oplus E''.$$

□

III.7 Normalni sveženj podmnogoterosti in izrek o cevastih okolicah

Naj bo $M \subset X$ gladka podmnogoterost. Njen tangentni sveženj TM je podsveženj zožitve $TX|_M$ tangentnega svežnja X na M. Kvocientni sveženj $TX|_M/_{TM} = N_{M/X}$ imenujemo *normalni sveženj* M v X. Imamo torej kratko eksaktno zaporedje

$$0 \to TM \hookrightarrow TX|_M \to TX|_M/TM = N_{M/X} \to 0.$$

Po prejšnji trditvi obstaja vložitev $N_{M/X} \overset{\varphi}{\hookrightarrow} TX|_M$ in je

$$TM \oplus N_{M/X} \approx TX|_M.$$

Če izberemo na tangentnem svežnju TX polje skalarnih produktov g (tako polje se imenuje *Riemannova metrika* na mnogoterosti X), lahko predstavimo normalni sveženj $N_{M/X}$ kot ortogonalni komplement tangentnega svežnja TM v tangentnem svežnju $TX|_M$ ambientne mnogoterosti, zoženem na M:

$$TX|_M = TM \oplus_{\perp g} N_{M/X}$$

Izrek. (O obstoju cevaste okolice) *Če je M gladka podmnogoterost v gladki mnogoterosti X, potem ima M neko odprto okolico $\Omega \subset X$, ki je difeomorfna neki odprti okolici $U \subset N_{M/X}$ ničelnega prereza v normalnem svežnju M v X.*

Izrek je pomemben, ker pove, da lahko probleme, ki jih rešujemo v neki okolici M v X, prevedemo na problem v normalnem svežnju $N = N_{M/X}$, kjer pa imamo linearno strukturo in se problem poenostavi.

Opomba. V nadaljevanju označimo $N = N_{M/X}$. Okolico U v izreku lahko izberemo tako, da so njena vlakna U_x ($x \in M$) konveksne množice v vlaknih N_x, npr. krogle polmera $r(x) > 0$ v neki metriki na N. S pomočjo nelinearne dilatacije v vlaknih (npr. z uporabo funkcije tangens) lahko totalni prostor N preslikamo difeomorfno na U.

Če ima U konveksna vlakna, je družina preslikav

$$\tau_t \colon U \to U \ (t \in [0,1]), \quad \tau_t(x,e) = (x, te) \ \forall e \in U_x$$

homotopija množice U na ničelni prerez. Velja

$$\tau_1 = \mathrm{id}_U, \quad \tau_0 = (x,0) = 0_x, \quad \tau_t(x,0) = (x,0),$$

torej homotopija miruje na ničelnem prerezu. Taki homotopiji pravimo *deformacijska retrakcija* U na ničelni prerez.

Posledica. *Če je $M \subset X$ vložena podmnogoterost, potem ima M bazo okolic $\Omega \subset X$, tako da je M deformacijska retrakcija vsake od teh okolic.*

Dokaz. Prvi primer: $X = \mathbb{R}^n$, $\dim M = m$, $d = n - m = \operatorname{rang} N$, kjer je $N = N_{M/\mathbb{R}^n}$.
$M \times \mathbb{R}^n = T\mathbb{R}^n|_M = TM \oplus N$, $N \subset M \times \mathbb{R}^n$.
Za vsako točko $x \in M$ označimo z $0_x \in N_x$ ničelni element vektorskega prostora N_x (to je vlakno normalnega svežnja nad točko x). Preslikava $M \ni x \to 0_x \in N$ je difeomorfizem mnogoterosti M na ničelni prerez $M_0 = \{0_x \colon x \in M\} \subset N$ normalnega svežnja. (Običajno mnogoterost M kar identificiramo z ničelnim prerezom M_0 v normalnem svežnju N.) Vlakno N_x je vektorski podprostor v $T_x\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$, torej lahko vsak element $e_x \in N_x$ razumemo kot vektor v $\mathbb{R}^n$. Definiramo preslikavo

$$\varphi\colon N \to \mathbb{R}^n, \qquad \varphi(e_x) = x + e_x \quad \forall e_x \in N_x.$$

Očitno je $\varphi(0_x) = x$ za vsak $0_x \in M_0$; torej je $\varphi\colon M_0 \to M$ difeomorfizem, ki je inverz od $x \to 0_x$. (Pri identifikaciji $M \approx M_0$ je $\varphi|_M = \mathrm{Id}_M$.)
Diferencial preslikave φ v točki $0_x \in N_x$ je linearna preslikava

$$(d\varphi)_{0_x} \colon T_{0_x}N \to T_x\mathbb{R}^n.$$

Tangentni prostor $T_{0_x}N$ je direktna vsota tangentnega prostora $T_{0_x}M_0$ ničelnega prereza M_0 (t.i. "horizontalna komponenta") in tangentnega prostora $T_{0_x}N_x$ na vlakno N_x (t.i. "vertikalna komponenta"). Ker je N_x vektorski prostor, lahko tangentni prostor $T_{0_x}N_x$ identificiramo z N_x. Torej imamo

$$T_{0_x}N = T_{0_x}M_0 \oplus T_{0_x}N_x \approx T_xM \oplus N_x.$$

Ker je $\varphi|_M = \mathrm{Id}_M$, je

$$d\varphi_{0_x} \colon T_xM \xrightarrow{\mathrm{id}} T_xM \subset T_x\mathbb{R}^n.$$

Oglejmo si še vertikalno komponento. Iz predpisa $\varphi(e_x) = x + e_x$ sledi, da je za fiksen x preslikava $N_x \ni e_x \mapsto \varphi(e_x)$ linearni izomorfizem N_x na afin podprostor $x + N_x \subset \mathbb{R}^n$, ki ga identificiramo z vektorskim podprostorom $N_x \subset T_x\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$. Diferencial linearne preslikave je kar enak tej preslikavi, torej je

$$d\varphi_{0_x} \colon N_x \to N_x \subset T_x\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$$

linearni izomorfizem.
Povzetek: diferencial $d\varphi_{0_x} \colon T_{0_x}N \xrightarrow{\cong} T_x\mathbb{R}^n$ preslika horizontalno komponento $T_{0_x}M_0$ izomorfno na tangentni prostor $T_xM \subset \mathbb{T}_x\mathbb{R}^n$ in preslika vertikalno komponento $T_{0_x}N_x \approx N_x$ izomorfno na normalni prostor $N_x \subset T_x\mathbb{R}^n$. Ker sta slednja dva prostora komplementarna, sledi, da je $d\varphi_{0_x}$ linearni izomorfizem.
Iz izreka o inverzni preslikavi sledi, da je φ lokalni difeomorfizem v neki okolici $\Omega_0 \subset N$ ničelnega prereza M_0.

Sedaj je potrebno najti manjšo odprto okolico Ω, $M_0 \subset \Omega \subset \Omega_0$, tako da je $\varphi\colon \Omega \to\subset \mathbb{R}^n$ injektivna in zato difeomorfizem na svojo sliko $\varphi(\Omega) = \Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$.

Dokaz za primer, ko je M kompaktna:
Recimo, da φ ni injektivna v nobeni okolici ničelnega prereza $M_0 \subset N$. Tedaj obstaja zaporedji $a_j, b_j \in N$, ki konvergirata proti M_0 ($a_j \to M_0$, $b_j \to M_0$ ko gre $j \to \infty$), tako da za vsak indeks

j velja $a_j \neq b_j$ in $\varphi(a_j) = \varphi(b_j)$. Če je M (in s tem $M_0 \approx M$) kompaktna, lahko s prehodom na podzaporedje dobimo konvergentni zaporedji $a_j \to a_0 \in M_0$, $b_j \to b_0 \in M_0$. Odtod sledi po zveznosti

$$\varphi(a_0) = \lim \varphi(a_j) = \lim \varphi(b_j) = \varphi(b_0).$$

Ker je φ injektivna na M_0, sledi $a_0 = b_0$. To je protislovje, saj je φ difeomorfizem na neki okolici $U \subset N$ točke a_0, za vse dovolj velike j pa velja $a_j, b_j \in U$, $a_j \neq b_j$ in $\varphi(a_j) = \varphi(b_j)$.

Če X ni $\mathbb{R}^n$, ne moremo definirati preslikave φ kot zgoraj. Dva načina dokaza:

1^o $X \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ (vložitev)

2^o z vektorskimi polji

$\square$

IV Liejeve grupe in Liejeve algebre

IV.1 Definicija Liejeve grupe in primeri

Definicija. Realna Liejeva grupa *G je gladka mnogoterost, ki je hkrati grupa, tako da so algebraične operacije (produkt $G \times G \to G$, $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$ in inverz $G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$) gladke preslikave.*
Kompleksna Liejeva grupa *je kompleksna mnogoterost G, ki je hkrati grupa, tako da so grupne operacije holomorfne.*

Primer. 1^o $(\mathbb{R}^n, +)$ je Liejeva grupa
$(\mathbb{C}^n, +)$ je kompleksna Liejeva grupa

2^o $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon \det A \neq 0\}^{odprta} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ je realna Liejeva grupa.
$(A, B) \mapsto A \cdot B$ operacije so polinomske
$A \mapsto A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$ racionalna
$GL_n(\mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} \colon \det A \neq 0\}^{odprta} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ je kompleksna Liejeva grupa.

Definicija. *Naj bo G Liejeva grupa. Liejeva podgrupa $H \subset G$ je podgrupa, ki je hkrati podmnogoterost.*

Primer. 1^o $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \colon \det A = 1\}$
Očitno je podgrupa, zaprta. Preveri, da je število $1 \in \mathbb{R}$ regularna vrednost preslikave $A \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto \det A \in \mathbb{R}$ (to je, rang je enak 1 v vsaki točki, kjer $\det A = 1$). Torej je $SL_n(\mathbb{R})$ hiperploskev v $GL_n(\mathbb{R})$ (glej vaje).
$SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \colon \det A = 1\}$ je kompleksna Liejeva podgrupa grupe $GL_n(\mathbb{C})$.

2^o $O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \colon A^T A = I\}$ (ortogonalna grupa) je realno analitična Liejeva podgrupa v $GL_n(\mathbb{R})$.
$U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \colon \overline{A}^T A = I\}$ (unitarna grupa) je realna Liejeva podgrupa v $GL_n(\mathbb{C})$, ni pa kompleksna Liejeva podgrupa, saj ni kompleksna podmnogoterost.

3^o Če je $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \ldots + \mathbb{Z}e_k$ diskretna aditivna pogrupa v $\mathbb{R}^n$, je kvocient $\mathbb{R}^n/_\Gamma$ je Liejeva grupa z operacijo $+$, podedovano iz $\mathbb{R}^n$. Če je Γ maksimalnega ranga n, je $\mathbb{R}^n/_\Gamma$ torus.

4^o Podobno kot v prejšnji točki je za vsako diskretno aditivno podgrupo $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ kvocient $\mathbb{C}^n/_\Gamma$ kompleksna Liejeva grupa.

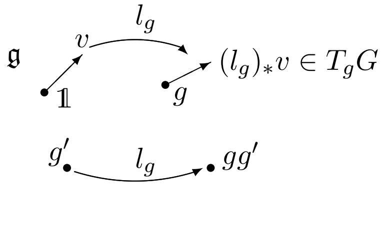
Naj bo $\mathbb{1} \in G$ enota Liejeve grupe G. Vsakemu elementu $g \in G$ priredimo levo moženje

$$l_g \colon G \to G, \quad l_g(g') = gg' \quad (\forall g' \in G)$$

in desno množenje

$$r_g \colon G \to G, \quad r_g(g') = g'g \quad (\forall g' \in G).$$

Obe preslikavi l_g, r_g sta difeomorfizma z inverzom $(l_g)^{-1} = l_{g^{-1}}$, $(r_g)^{-1} = r_{g^{-1}}$.



IV.2 Liejeva algebra in invariantna vektorska polja

Definicija. *Naj bo G Liejeva grupa z enoto $\mathbb{1}$. Njena* Liejeva algebra *je*

$$\mathfrak{g} \overset{def}{=} T_{\mathbb{1}}G = \text{ tangentni prostor na } G \text{ v enoti } \mathbb{1} \in G.$$

Vsakemu elementu $v \in \mathfrak{g}$ priredimo vektorsko polje $V = \tilde{v}$ na G s predpisom:

$$V_g = d(l_g)|_{\mathbb{1}} \cdot v = (l_g)_* v \in T_gG, \quad g \in G.$$

Očitno je V gladko vektorsko polje na G, saj so grupne operacije gladke.

Trditev. *Tako definirano vektorsko polje V na G je levo invariantno.*

Dokaz. Naj bo $g, h \in G$. Potem velja

$$(l_h)_* V_g = (l_h)_* \circ (l_g)_* v = (l_h \circ l_g)_* v = (l_{hg})_* v = V_{hg} = V_{l_h(g)}.$$

To pomeni, da je V levo invariantno. $\square$

Podobno definiramo polje $v \rightsquigarrow \widetilde{V}_g = d(r_g)\, v \in T_gG$. Preveri, da je tako definirano vektorsko polje desno invariantno, to je, $(r_h)_* \widetilde{V} = \widetilde{V}$, $\forall h \in G$.

Opomba. *V splošnem $V \neq \widetilde{V}$, razen če je G abelova grupa.*

Primer. 1^o $G = (\mathbb{R}^n, +)$ (enota je $\mathbb{1} = 0$)
Liejeva algebra $\mathfrak{g} = T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$
$v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$
$\tilde{v} = V = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ (vektor $v = V_0$ translatiramo po $\mathbb{R}^n$)

2^o $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{1} = 1$
$v \in T_1\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, l_x je množenje z x
$V_x = vx\frac{\partial}{\partial x}$
Bazno levo invariantno vektorsko polje: $x\frac{\partial}{\partial x}$

Oglejmo si vložitev

$$T_{\mathbb{1}}G = \mathfrak{g} \overset{\Phi}{\mapsto} \aleph(G)$$

v Liejevo algebro vseh gladkih vektorskih polj na G. Spomnimo se, da je $\aleph(G)$ Liejeva algebra za operacijo komutator (ali Liejev odvod) vektorskih polj:

$$(V, W) \mapsto [V, W] = L_V W$$

Trditev. *Če sta V, W levo invariantni vektorski polji na G, potem so tudi polja $V + W$, cV ($c \in \mathbb{R}$), $[V, W]$ levo invariantna.*

To pomeni, da je slika vložitve $\Phi\colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \aleph(G)$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre vseh vektorskih polj. *Torej obstaja natanko ena struktura Liejeve algebre na $\mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}}G$, za katero je vložitev $\Phi\colon \mathfrak{g} \hookrightarrow \aleph(G)$ Liejev izomorfizem $\mathfrak{g}$ na podalgebro levo invariantnih polj na G.*

Dokaz. Naj bo l poljubno levo množenje na G. Potem je

$$l_*(V+W) = l_*V + l_*W = V + W$$

ker sta V in W levo invariantni. Podobno

$$l_*(cV) = cl_*V = cV, \quad l_*([V,W]) = [l_*V, l_*W] = [V,W].$$

$\square$

Trditev. *Tangentni sveženj vsake Liejeve grupe G je trivialen: $TG \cong G \times \mathbb{R}^n$, $n = \dim G$.*

Dokaz. Izberimo bazo $v_1, \ldots, v_n$ Liejeve algebre $T_{\mathbb{1}}G = \mathfrak{g}$. Naj bodo $V_1, \ldots, V_n$ pripadajoča levo invariantno polja. Ker je $V_j(g(= d(l_g)v_j$ in je levo množenje l_g difeomorfizem grupe G, so vektorji $V_1(g), \ldots, V_n(g)$ baza T_gG za vsak $g \in G$. Preslikava

$$G \times \mathbb{R}^n \ni (g, (c_1, \ldots, c_n)) \overset{\Phi}{\mapsto} \sum_{j=1}^n c_j V_j(g) \in T_gG$$

je izomorfizem vektorskih svežnjev. $\square$

Trditev. *Vsako levo invariantno (ali desno invariantno) vektorsko polje na Liejevi grupi je kompletno, to je, njegov tok φ_t obstaja za $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Dokaz. Naj bo $\gamma(t)$ tokovnica polja V, $\gamma(0) = \mathbb{1}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
Izberimo element $g \in G$. Oglejmo si pot $\lambda(t) = l_g(\gamma(t)) = g\gamma(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
$\lambda(0) = g\gamma(0) = g$
$\dot{\lambda}(t)|_{t=0} = (dl_g)_{\mathbb{1}} \cdot \dot{\gamma}(0) = (dl_g)_{\mathbb{1}} \cdot v = V_g$ po definiciji levo invariantnega polja
$\dot{\lambda}(t) = (l_g)_* \cdot \dot{\gamma}(t) = (l_g)_* V_{\gamma(t)} = V_{g\gamma(t)} = V_{\lambda(t)}$.
Torej je $\lambda(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tokovnica polja V, ki je v času $t = 0$ v točki g.
To pomeni, da fundamentalna domena toka polja V vsebuje množico $G \times (-\varepsilon, \varepsilon) \subset G \times \mathbb{R}$. Od tod sledi, da je V kompletno (fundamentalna domena je $G \times \mathbb{R}$). $\square$

Trditev. *Tokovnica levo invariantnega vektorskega polja V skozi enoto $\mathbb{1} \in G$ je enoparametrična podgrupa grupe G.*

Dokaz. Fiksirajmo $s \in \mathbb{R}$. Oglejmo si poti

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t+s)$$
$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(s)\gamma(t)$$

Obe poti sta tokovnici polja V, ki gresta pri $t = 0$ skozi isto točko $\gamma(s)$. Zaradi enoličnosti tokovnic sledi, da sovpadata, torej je $\gamma(t+s) = \gamma(s)\gamma(t) = \gamma(t)\gamma(s)$ za vsak $s, t \in \mathbb{R}$. $\square$

Primer. 1^o $G = (\mathbb{R}^n, +)$
$\mathfrak{g} = T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$
$[\cdot, \cdot] = 0$ ker je G abelova
Levo invariantna polja so konstantna polja
$v, w \in \mathfrak{g}$, $[v, w] = [V, W]_0$ (ker imata V,W konstantne koeficiente), $V_0 = v$, $W_0 = w$.

2^o $GL_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{gl}_n = T_I GL_n(\mathbb{R}) = T_I \mathbb{R}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ (vse $n \times n$ matrike), $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

$A \in \mathfrak{gl}_n$, $A = (a_{ij})$
V^A pripadajoče levo invariantno vektorsko polje na $GL_n(\mathbb{R})$
$X \in GL_n(\mathbb{R})$
$\gamma(t) = I + tA \in GL_n(\mathbb{R})$ za majhne $|t|$, $\gamma(0) = I$, $\dot{\gamma}(0) = A$ tangentni vektor poti γ.

$$\begin{aligned} (V^A)_X &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} l_X \cdot \gamma(t) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X(I + tA) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (X + tXA) \\ &= XA \in T_X GL_n(R) \approx \mathbb{R}^{n\times n}. \end{aligned}$$

Označimo koordinate na $\mathbb{R}^{n\times n}$ z $X = x_{ij}$:

$$(V^A)_X = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} a_{kj} \right) \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

Vsota $\sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik} a_{kj}$ je (i,j) element matrike XA, ki predstavlja vektorsko polje V^A v točki X. Če je $B \in \mathfrak{gl}_n$, je

$$(V^B)_X = \sum_{l,m=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{p=1}^{n} x_{lp} b_{pm} \right)}_{(l,m) \text{ el. v } XB} \frac{\partial}{\partial x_{lm}}.$$

Odtod sledi

$$\begin{aligned} \left[V^A, V^B\right] &= \sum_{i,j,k,l,m,p} \left(x_{ik} a_{kj} \frac{\partial (x_{lp} b_{pm})}{\partial x_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_{lm}} - x_{lp} b_{pm} \frac{\partial (x_{ik} a_{kj})}{\partial x_{lm}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \right) = \\ &= \sum_{i,j,k,m} x_{ik} a_{kj} b_{jm} \frac{\partial}{\partial x_{im}} - \sum_{i,j,k,p} x_{ip} b_{pk} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \end{aligned}$$

Sedaj pogledamo vrednosti pri $X = I$: $x_{ip} = \delta_{ip}$, $x_{ik} = \delta_{ik}$. Torej je

$$\left[V^A, V^B\right]_I = \underbrace{\sum_{i,j,m} a_{ij} b_{jm}}_{(AB)_{im}} \frac{\partial}{\partial x_{im}} - \underbrace{\sum_{i,j,k} b_{ik} a_{kj}}_{(BA)_{ij}} \frac{\partial}{\partial x_{ij}} \rightsquigarrow AB - BA.$$

Torej je $[V^A, V^B]$ levo invariantno vektorsko polje na $GL_n(\mathbb{R})$, ki pripada matriki $[A,B] = AB - BA \in \mathfrak{gl}_n$.
$\mathfrak{gl}_n = (\mathbb{R}^{n\times n}, [\cdot,\cdot])$ matrični komutator

Tok polja $V_X^A = XA$:
Tokovnica $\gamma(t)$ zadošča enačbi $\dot\gamma(t) = V^A_{\gamma(t)} = \gamma(t)A$

$$\Longrightarrow \gamma(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n, \qquad \gamma(0) = I$$

$\varphi_t(X) = Xe^{tA}$ je tok skozi točko $X \in GL_n(\mathbb{R})$.

IV.3 Eksponentna preslikava na Liejevi grupi

$$\exp\colon \mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}}G \to G$$

Modelni primer: $G = GL_n(\mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n \cong \mathbb{R}^{n\times n}$ ($n \times n$ matrike);

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

Eksponentno prelikavo na poljubni Liejevi grupi definiramo na naslednji način. Vektorju $v \in \mathfrak{g}$ priredimo levo invariantno polje V s predpisom

$$V(g) = (dl_g)_{\mathbb{1}} v \in T_gG.$$

Ker je polje V kompletno, obstaja tokovnica $\varphi_t(\mathbb{1}) = e^{tv} \cdot \mathbb{1}$ za vsak $t \in \mathbb{R}$. Sedaj definiramo

$$\exp v = \varphi_1(\mathbb{1}).$$

V primeru, ko je $G = GL_n(\mathbb{R})$, $v = A \in \mathfrak{g}l_n$, $\varphi_t^A(I) = e^{tA}$, dobimo

$$\exp(A) = \varphi_1^A(I) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

Preslikava $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ je gladka, $\exp(0) = \mathbb{1}$.

Trditev. *Diferencial eksponentne preslikave* $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ *v identiteti* $\mathbb{1} \in G$ *je identična preslikava na Liejevi algebri* $\mathfrak{g}$*:*

$$d\exp|_0\colon T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \longrightarrow T_{\mathbb{1}}G = \mathfrak{g}, \quad d\exp|_0 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}\,.$$

Dokaz. Naj bo $v \in \mathfrak{g}$ in V prirejeno levo invariantno polje na G. Označimo z $\lambda_v(t) = \varphi_t^v(\mathbb{1})$ tok polja V. Po definiciji je torej $\exp(v) = \lambda_v(1)$ za vsak $v \in \mathfrak{g}$.
Naj bo $s \in \mathbb{R}$. Ker je sV levo invariatno polje, prirejeno vektorju $sv = sV|_{\mathbb{1}} \in \mathfrak{g}$, je preslikava $t \mapsto \lambda_{sv}(t)$ tokovnica polja sV, ki gre pri $t = 0$ skozi $\mathbb{1} \in G$. Trdimo:

$$\lambda_{sv}(t) = \lambda_v(st).$$

Dokaz:

$$\frac{d}{dt}\lambda_v(st) = \underbrace{\frac{d}{du}\lambda_v(u)}_{V(\lambda_v(st))}\underbrace{\frac{du}{dt}}_{s} = s \cdot V(\lambda_v(st)).$$

To pomeni, da je tudi $t \mapsto \lambda_v(st)$ tokovnica polja V, ki gre pri $t = 0$ skozi $\mathbb{1} \in G$. Iz enoličnosti tokovnic sledi $\lambda_{sv}(1) = \lambda_v(s)$. Torej velja

$$\exp(sv) = \lambda_v(s), \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Z odvajanjem po s pri $s = 0$ dobimo

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \exp(sv) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \lambda_v(s) = v.$$

Ker je $s \mapsto sv \in \mathfrak{g}$ pot s tangentnim vektorjem v, je po geometrijski definiciji diferenciala leva stran zgornje enačbe enaka $d\exp|_0 \cdot v$. Torej zgornja enačba pove

$$d\exp|_0 \cdot v = v, \quad \forall v \in \mathfrak{g}.$$

□

Izrek o inverzni preslikavi pove, da exp preslika neko okolico $0 \in \mathfrak{g}$ difeomorfno na neko okolico $\mathbb{1} \in G$. V splošnem ta preslikava ni surjektivna in lahko ima kritična točke daleč od izhodišča 0.

Sprej na Liejevi grupi. S translacijo eksponentne preslikave z grupnim produktom dobimo na G preslikavo, ki se imenuje *sprej*. Konstrukcija je naslednja.
Naj bo $\dim G = n$. Produkt $G \times \mathfrak{g} \approx G \times \mathbb{R}^n$ je trivialen vektorski sveženj nad G. Definiramo preslikavo $s\colon G \times \mathfrak{g} \to G$ s predpisom

$$s(g, v) = ge^v = l_g(e^v), \quad s(g, 0) = g.$$

Njen diferencial v točki $(g, 0)$ iz ničelnega prereza je linearna preslikava

$$ds_{(g,0)}\colon T_{(g,0)}(G \times \mathfrak{g}) \to T_gG.$$

Tangentni prostor $T_{(g,0)}(G \times \mathfrak{g})$ je direktna vsota $T_gG \oplus T_0\mathfrak{g}$, kjer je drugi sumand tangenta na vlakno (t.i. vertikalni tangentni prostor v točki $(g, 0)$). Zožitev diferenciala na drugo komponento $\mathfrak{g}$ je enak diferencialu preslikave $\mathfrak{g} \ni v \mapsto l_g(e^v)$ pri $v = 0$. Po verižnem pravilu je ta enak

$$d(l_g)_{\mathbb{1}} \circ d_0e^v = d(l_g)_{\mathbb{1}}\colon \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} T_gG,$$

torej je izomorfizem.

$$\begin{tikzcd} G \times \mathbb{R}^n \arrow[d, "\pi"'] \arrow[d, bend left, "s \text{ (sprej)}"] \\ G \end{tikzcd}$$

IV.4 Liejeve podgrupe in podalgebre

Naj bosta G in G' Liejevi grupi in $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ njuni Liejevi algebri.

Definicija. *Gladka preslikava $F\colon G \to G'$, ki je hkrati homomorfizem grup, se imenuje* homomorfizem Liejevih grup.

Naslednjo trditev smo dokazali na vajah.

Trditev. *Naj bo $F\colon G \to G'$ homomorfizem Liejevih grup.*

1º Za vsako levo invariantno vektorsko polje V na G obstaja natanko eno levo invariantno polje $\widetilde{V}$ na G', tako da velja $dF_g V_g = \widetilde{V}_{F(g)}$ za vsak $g \in G$.

2º Diferencial $dF_{\mathbb{1}}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ v identiteti $\mathbb{1} = \mathbb{1}_G \in G$ je homomorfizem Liejevih algeber.

3º Jedro $\ker dF_{\mathbb{1}}$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

4º Slika $dF_{\mathbb{1}}(\mathfrak{g})$ je Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}'$.

5º Rang preslikave F je konstanten (neodvisen od točke $g \in G$).

6º Jedro $H = \ker F = \{g \in G\colon F(g) = \mathbb{1}_{G'}\}$ je Liejeva podgrupa grupe G.

Posledica. *Če je H Liejeva podgrupa Liejeve grupe G, je njena Liejeva algebra $\mathfrak{h} = T_{\mathbb{1}}H$ Liejeva podalgebra Liejeve algebre $\mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}}G$.*

Dokaz. Uporabimo prejšnjo trditev za inkluzijo $F\colon H \hookrightarrow G$. □

Sedaj bomo dokazali naslednji izrek.

Izrek. *Naj bo G Liejeva grupa z Liejevo algebro $\mathfrak{g} = T_{\mathbb{1}}G$. Za vsako Liejevo podalgebro $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ obstaja natanko ena povezana Liejeva podgrupa $H \subset G$ z Liejevo algebro $\mathfrak{h} = T_{\mathbb{1}}H$.*

Dokaz. Izberemo bazo $v_1, \ldots, v_d \in \mathfrak{h} = \mathbb{R}^d$.
Naj bodo $V_1, \ldots, V_d$ prirejena levo invariantna polja. Ta napenjajo podvseženj $E \subset TG$ ranga d. Njegovo vlakno E_g je enako

$$E_g = \mathrm{Lin}\{V_1(g), \ldots, V_d(g)\}$$

$\dim E_g = d$ neodvisna od izbire $g \in G$.
Trdimo, da je E involutiven. V ta namen moramo dokazati, da je komutator $[V_j, V_k]$ tangenten na E za vsak $j, k = 1, \ldots, d$. To polje je levo invariantno, ki pripada komutatorju $[v_j, v_k] \in \mathfrak{g}$. Ker je $\mathfrak{h}$ Liejeva podalgebra, je $[v_j, v_k] \in \mathfrak{h}$, torej je

$$[v_j, v_k] = \sum_{i=1}^{d} c_{ijk} v_i, \quad c_{ijk} \in \mathbb{R}.$$

Ker vemo, da se operacije na vektorjih iz $\mathfrak{g}$ ujemajo z operacijami na prirejenih levo invariantnih vektorskih poljih, odtod sledi

$$[V_j, V_k] = \sum_{i=1}^{d} c_{ijk} V_i.$$

Polje na desno pa je seveda tangentno na E.
Po Frobeniusovemu izreku obstaja natanko ena maksimalna integralna podmnogoterost $H \subset G$ skozi točko $\mathbb{1}$. H je imerzirana podmnogoterost v G, ki je dobljena kot orbita tokov polj vektorskih polj $V_1, \ldots, V_d$ skozi $\mathbb{1}$.
Ni težko dokazati, da je H tudi podgrupa grupe G (glej vaje). □

H ni nujno enostavno povezana. Lokalno jo dobimo z eksponenciranjem vektorjev iz $\mathfrak{h}$.
Brez dokaza bomo navedli naslednji izrek.

Izrek (Ado)**.** *Vsaka končno dimenzionalna Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je izomorfna neki Liejevi podalgebri $\mathfrak{gl}_n$ za nek $n \in \mathbb{N}$.*

Posledica. *Za vsako Liejevo algebro $\mathfrak{g}$ obstaja povezana Liejeva grupa G, ki ima $\mathfrak{g}$ za svojo Liejevo algebro: $T_{\mathbb{1}}G = \mathfrak{g}$.*

Če je $\widehat{G} \xrightarrow{\pi} G$ univerzalni krov ($\widehat{G}$ enostavno povezana Liejeva grupa), potem je π lokalni difeomorfizem:

$$T_{\mathbb{1}}\widehat{G} = T_{\mathbb{1}}G = \mathfrak{g}$$

Opomba. V splošnem univerzalni krov neke matrične Liejeve grupe (podgrupa v $GL_n(\mathbb{R})$) ni matrična grupa.

Primer. $SO(2n)$, $n \geq 2$: npr. $SO(4)$ ima fundamentalno grupo $\pi_1(SO(4)) = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$.

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \hookrightarrow Spin(4) \xrightarrow[\text{krov}]{\text{dvolistni univerzalni}} SO(4) \to 1$$

Primer.

$$1 \to S^3 = SU(2) \hookrightarrow U(2) \xrightarrow{det} S^1 = U(1) \to 1$$
$$\pi_1(U(2)) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

IV.5 Adjungirana reprezentacija Liejeve grupe

Vsako Liejevo grupo G lahko vložimo v Diff G:

$$\begin{array}{ccc} G & \hookrightarrow & \operatorname{Diff} G \\ g & \mapsto & l_g \end{array}$$

Levo množenje l_g ni avtomorfizem Liejeve grupe, ker identiteto slika v g.
Avtomorfizem G je difeomorfizem $G \to G$, ki je tudi grupni homomorfizem.

$$\operatorname{Aut} G = \text{ vsi avtomorfizmi } G$$

Primer. Vsakemu elementu $g \in G$ priredimo *notranji avtomorfizem* $\sigma(g) \in \operatorname{Aut} G$ s predpisom

$$\sigma(g)h = ghg^{-1} \quad \forall h \in G \ \text{ (konjugiranje z } g\text{)}.$$

Preverimo, da je to res avtomorfizem:

$$\sigma(g)(h_1h_2) = gh_1h_2g^{-1} = gh_1g^{-1}gh_2g^{-1} = \sigma(g)h_1 \cdot \sigma(g)h_2$$

□

Naj bo G povezana Liejeva grupa in $\alpha \in \operatorname{Aut} G$. Njegov diferencial α_* preslika vsako levo invariantno polje na G v levo invariantno polje; torej α_* inducira Liejev izomorfizem Liejeve algebre levo invariantnih vektorskih polj na G samo nase. Njegova vrednost v identiteti $\mathbb{1} \in G$ je torej Liejev izomorfizem

$$d\alpha_{\mathbb{1}} : T_{\mathbb{1}}G = \mathfrak{g} \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}.$$

Naj bo $v \in \mathfrak{g}$ in V prirejeno levo invariantno polje: $V_{\mathbb{1}} = v$. Označimo $w = d\alpha_{\mathbb{1}}(v) \in \mathfrak{g}$ in W levo invariantno polje z $W_{\mathbb{1}} = w$. Potem je $\alpha_* V = W$.
Označimo s ϕ_t tok polja V in s ψ_t tok polja W. Iz $\alpha_* V = W$ sledi

$$\alpha \circ \phi_t = \psi_t \circ \alpha \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Uporabimo to identiteto pri $t = 1$ in na začetnem elementu $\mathbb{1} \in \mathfrak{g}$:

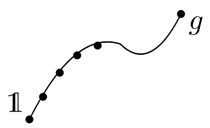
$$\alpha \circ \phi_1(\mathbb{1}) = \psi_1 \circ \alpha(\mathbb{1}) = \psi_1(\mathbb{1}).$$

Po definiciji eksponentne preslikave je $e^v = \phi_1(\mathbb{1})$ in $e^w = \psi_1(\mathbb{1})$. Zgornja enačba torej pove:

$$\alpha(e^v) = e^w = e^{d\alpha_{\mathbb{1}} \cdot v}.$$

Posledica. *Če je G povezana Liejeva grupa in je $\alpha \in \operatorname{Aut} G$ avtomorfizem z $d\alpha_{\mathbb{1}} = \mathrm{Id}$, potem je $\alpha = \mathrm{Id}_G$.*

Dokaz. Če je $d\alpha_{\mathbb{1}} = \mathrm{Id}$, sledi $\alpha(e^v) = e^v$, $\forall v \in \mathfrak{g}$. Vemo, da je množica $U = \{e^v \in G : v \in \mathfrak{g}\}$ okolica $\mathbb{1} \in G$. Ker je na tej okolici $\alpha = \mathrm{Id}$ in je G povezana, sledi $\alpha = \mathrm{Id}_G$. Razlog je v tem, da lahko vsak element $g \in G$ zapišemo kot končen produkt $g = g_1 g_2 \dots g_N$ elementov $g_j \in U$.



$$\begin{aligned} g &= g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_N, \qquad \forall g_j = e^{v_j} \\ \alpha(g) &= \alpha(e^{v_1})\alpha(e^{v_2}) \dots \alpha(e^{v_N}) = g \end{aligned}$$

□

Dobili smo torej reprezentacijo grupe avtomorfizmov $\operatorname{Aut} G$ kot grupo linearnih avtomorfizmov Liejeve algebre $\mathfrak{g}$:

$$\operatorname{Aut} G \ni \alpha \mapsto d\alpha_{\mathbb{1}} \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g} = \text{ grupa vseh Liejevih avtomorfizemov } \mathfrak{g}.$$

Ta reprezentacija je zvesta (faithful), kar je ravno prejšnja posledica.

Oglejmo si sedaj prirejeno reprezentacijo podgrupe vseh konjugiranj σ_g:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\sigma"] & \operatorname{Aut} G \arrow[r, "\text{dif. v } \mathbb{1}"] & \operatorname{Aut} \mathfrak{g} \\ g \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "Ad"'] & \sigma(g) \arrow[r, mapsto] & d\sigma(g)_{\mathbb{1}} \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{llll} Ad\colon & G & \to & \operatorname{Aut} \mathfrak{g} \quad \text{je adjungirana reprezentacija } G \\ & g & \mapsto & d\sigma(g)_{\mathbb{1}} \end{array}$$

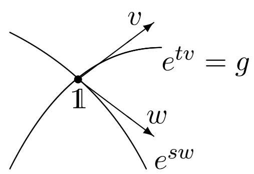
Z diferenciranjem preslikave $Ad\colon G \to \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$ v identiteti $\mathbb{1} \in G$ dobimo adjungirano reprezentacijo Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ v $\operatorname{End} \mathfrak{g}$:

$$dAd_{\mathbb{1}} : T_{\mathbb{1}} G = \mathfrak{g} \xrightarrow{ad} T_{\mathbb{1}} \operatorname{Aut} \mathfrak{g} = \operatorname{End} \mathfrak{g}.$$

Trditev. *Za vsak* $v \in \mathfrak{g}$ *velja*

$$ad(v)w = [w, v] \quad \forall w \in \mathfrak{g}.$$

Dokaz. Izberemo lokalne koordinate $x = (x_1, \dots, x_n)$ na G v okolici $\mathbb{1}$, $x(\mathbb{1}) = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.
$\mathfrak{g} \ni v \rightsquigarrow V = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ levo invariantno vektorsko polje na G
$\mathfrak{g} \ni w \rightsquigarrow W = \sum_{j=1}^n \eta_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$
Fiksirajmo $t \in \mathbb{R}$.



$$\sigma(g)e^{sw} = ge^{sw}g^{-1} = e^{tv}e^{sw}e^{-tv}$$

Za fiksen t je

$$Ad(e^t v)w = d\sigma(e^{tv})\big|_{\mathbb{1}} \cdot w = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \sigma(e^{tv})e^{sw}.$$

Z odvajanjem po t pri $t = 0$ dobimo:

$$ad(v)w = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (Ad(e^{tv})w) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\bigg|_{t=s=0} e^{tv}e^{sw}e^{-tv}$$

Z Liejevim razvojem toka ni težko videti, da je ta izraz enak $[w, v]$. $\square$

V Nesingularne gladke preslikave in transverzalnost

V.1 Izrek o rangu in regularne preslikave

Izrek (izrek o rangu)**.** *Naj bo $D \subset \mathbb{R}^n$ domena v $\mathbb{R}^n$ in $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\mathcal{C}^k$-preslikava za $k \geq 1$. Če je $r = \operatorname{rang} df_x = \operatorname{rang}_x f \leq \min\{n, m\}$ konstanten (neodvisen od x), potem za vsako točko $p \in D$ obstaja $\mathcal{C}^k$ karta (U, φ), $p \in U \subset D$, $\varphi\colon U \to U' \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi(p) = 0$ in $\mathcal{C}^k$ karta (V, ψ) na $\mathbb{R}^n$, $f(U) \subset V$, $\psi\colon V \to V' \subset \mathbb{R}^m$, $\psi(f(p)) = 0$,*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & V \arrow[d, "\psi"] \\ U' \arrow[r, "\tilde{f}"] & V' \end{tikzcd}$$

tako da je

$$\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0), \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in U.$$

Če označimo

$$\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r, \quad \pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_r) \quad \text{(koordinatna projekcija)},$$

$$\iota\colon \mathbb{R}^r \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \iota(x_1, \ldots, x_r) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) \quad \text{(vložitev)},$$

potem lahko zapišemo $\widetilde{f}$ v obliki $\widetilde{f} = \iota \circ \pi$.

Izrek o rangu se dokaže enako kot izrek o implicitni funkciji; v bistvu gre za redukcijo na izrek o inverzni preslikavi.

Posebni primeri:

1^o $r = m = n \Rightarrow$ izrek o inverzni preslikavi, $\widetilde{f} = id$, f je lokalni difeomorfizem

2^o $r = n < m \Rightarrow \widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = (\underbrace{x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0}_{m})$, f je imerzija

3^o $n > m = r \Rightarrow \widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_m)$ projekcija na prvih m koordinat, f je submerzija

Regularne preslikave: imerzija, submerzija, lokalni difeomorfizmi, preslikave konstantnega ranga.

Opomba. 1^o Ker je izrek lokalen, se direktno posploši na mnogoterosti.

2^o Vsako vlakno $f^{-1}(q)$ $(q \in N)$ regularne preslikave je gladka podmnogoterost v M.

Opomba. Če je f lokalno oblike $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_m)$, $m < n$, potem so vlakna lokalno "vertikalne" ravnine.

V.2 Sardov izrek

Definicija. *Naj bo $f\colon M^m \to N^n$ $\mathcal{C}^r$-preslikava, $r \geq 1$. Točka $q \in N$ je* regularna vrednost *preslikave f, če za vse točke $p \in f^{-1}(q)$ velja*

$$\operatorname{rang}_p f = \operatorname{rang}(df_p\colon T_pM \to T_qN) = n = \dim N.$$

Vsaka točka $q \in N \setminus f(M)$ je regularna vrednost f (pogoj je na prazno izpolnjen). Točka $q \in N$, ki ni regularna vrednost f, se imenuje kritična vrednost.

Opomba. 1^o Če je $m < n$, potem je $q \in N$ regularna točka f natanko tedaj, ko $q \notin f(M)$.

2^o Če je $m \geq n$, potem je $q \in N$ regularna točka f natanko tedaj, ko bodisi $q \notin f(M)$ bodisi $q \in f(M)$ in je f submerzija v vsaki točki $p \in f^{-1}(q)$.

Definicija. *Točka $p \in M$ je kritična točka f, če $\operatorname{rang}_p f < n = \dim N$.*

Torej je $q \in N$ kritična vrednost f natanko tedaj, ko obstaja točka $p \in f^{-1}(q)$, ki je kritična točka f.

Zanima nas, kako velika (majhna) je množica kritičnih vrednosti.

Izrek (Sard, 1942)**.** *Naj bo $f\colon M^m \to N^n$ $\mathcal{C}^r$-preslikava, pri čemer je $r \geq \max\{0, m-n\}+1 \geq 1$. Potem ima množica njenih kritičnih vrednosti mero 0 v N in je prve kategorije (to je unija največ števno mnogo zaprtih nikjer gostih podmnožic).*

Izrek z drugimi besedami: Skoraj vsaka točka $q \in N$ je regularna vrednost f.

Poseben primer: $m < n$, $f\colon M^m \to N^n \Rightarrow$ množica $f(M)$ ima mero 0 v N (H. Whitney, 1936).

Posledica. *Za skoraj vsak $q \in N$ je $f^{-1}(q)$ prazna ali pa podmnogoterost v M.*

Izrek (Baire)**.** *V polnem metričnem prostoru je množice prve kategorije brez notranjosti.*

Ekvivalentno: števni presek odprtih povsod gostih množic je povsod gost (množica 2. kategorije).
"Generična točka" pomeni točko iz neke množice 2. kategorije v Baireovem prostoru (ki je lahko odvisna od konkretne situacije).
Sardov izrek lahko torej povemo z besedami: *Generična točka $q \in N$ je regularna vrednost gladke preslikave $f\colon M \to N$.*

Glavni posebni primer: $N = \mathbb{R}$. V tem primeru je to Morsejeva lema*:*

Lema (Morse, 1939)**.** *Če je $f\colon M^m \to \mathbb{R}$ funkcija razreda $\mathcal{C}^m$, potem je množica $f(\operatorname{Crit} f) \subset \mathbb{R}$ prve kategorije in ima mero 0.*

Dokaz. Dovolj je lemo dokazati za primer, ko je M zaprta krogla (ali zaprt kvader) v $\mathbb{R}^m$. Mnogoterost M lahko pokrijemo s končno ali števno podmnožicami, ki so difeomorfne zaprti krogli (ali zaprtemu kvadru) v $\mathbb{R}^m$. Dokazovane lastnosti (mera 0, 1. kategorija) dopuščajo števne unije.

Naj bo torej $M = \overline{B} \subset \mathbb{R}^m$ in $f(x_1, \ldots, x_m)$ funkcija razreda $\mathcal{C}^m$ na M.

Indukcija na m.

$m = 1$: $\overline{B}$ zaprt interval v $\mathbb{R}$.
$\operatorname{Crit} f = \{x \in \overline{B} \colon f'(x) = 0\}$ je zaprta, kompaktna. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je f' zvezna in zato enakomerno zvezna, $\exists \delta > 0$, da za $x, x' \in \overline{B}$, $|x - x'| < \delta$ velja $|f'(x) - f'(x')| < \epsilon$. Če vzamemo $x \in \operatorname{Crit} f$, je $f'(x) = 0$ in zato $|f'(x)| < \varepsilon$.
Pokrijemo $\operatorname{Crit} f$ s končno mnogo intervali $I_1, \ldots, I_n$, dolžine $|I_j| < \delta$, $I_j \cap \operatorname{Crit} f \neq \emptyset$. Zanima nas ocena za dolžino $|f(I_j)|$ (dolžina slike). $\forall x \in I_j$ velja po Lagrangeu $|f(x') - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |x' - x|$ kjer je $\xi \in I_j$ neka vmesna točka. $\xi - x < \delta$ ker je $|I_j| < \delta$ in $x \in \operatorname{Crit} f \Rightarrow |f'(\xi)| < \varepsilon$.
Torej dobimo $|f(x') - f(x)| < \epsilon\delta$ $\forall x' \in I_j \Rightarrow |f(I_j)| \leq \epsilon\delta$. Število potrebnih intervalov I_j je $\sim N = \frac{|\overline{B}|}{\delta} \Rightarrow f(\operatorname{Crit} f) \subset \bigcup_{j=1}^{N} f(I_j)$, $|f(\operatorname{Crit} f)| \leq \sum_{j=1}^{n} |f(I_j)| \leq N \cdot \varepsilon \cdot \delta \lessapprox \frac{|B|}{\delta} \cdot \varepsilon \cdot \delta = |B| \cdot \varepsilon$. To velja za $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow |f(\operatorname{Crit} f)| = 0$.
Opomba: popolnoma analogen dokaz v primeru: $f \colon \overline{B} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1$.

Induktivni korak: $m - 1 \Rightarrow m$.
Recimo, da izrek velja za funkcije na mnogoterostih dim $\leq m - 1$.
Naj bo $I = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ multiindeks, $|I| = i_1 + \ldots + i_m$, $\frac{\partial^{|I|} f}{\partial X^I} = \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_m^{i_m}}$, $|I| \leq m$.
Stratificiramo $\overline{B}$:

$$\overline{B} \supset \Sigma^1 \overset{def}{=} \operatorname{Crit} f \supset \Sigma^2 \supset \ldots \supset \Sigma^m$$

$$\Sigma^k \overset{def}{=} \{x \in \overline{B} \colon \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x^I}(x) = 0 \ \forall 1 \leq |I| \leq k\} \quad \text{(vsi parcialni odvodi } f \text{ reda 1 do } k \text{ s 0)}$$

Trdimo, da za vsak $k = 1, 2, \ldots, m - 1$ velja:

$$\operatorname{Crit} f = \Sigma^1 \supset S_k \overset{def}{=} \Sigma^k \setminus \Sigma^{k-1} \subset \bigcup_{|I|=k} H_I$$

pri čemer je

$$H_I \overset{def}{=} \{x \in \overline{B} \colon \frac{\partial^{|I|} f}{\partial x^I}(x) = 0,\ d(\partial^I f)(x) \neq 0\} \quad \text{(vsaj en parcialen odvod od } \partial^I f \text{ ni nič)}$$

Sledi

$$S_k \subset \bigcup_{|I|=k} \operatorname{Crit}(f|_{H_I})$$

Dokaz: $x \in S_k \Leftrightarrow \partial^I f(x) = 0 \ \forall |I| \leq k$ in $\exists |J| = k + 1$, $\partial^J f(x) \neq 0$.
$J = (j_1, \ldots, j_m)$, recimo da je $j_k > 0$.
$I = (j_1, \ldots, j_k - 1, \ldots, j_m)$
$\Rightarrow x \in H_I$, $\frac{\partial}{\partial x_k}(\partial^I f)(x) = \partial^J f(x) \neq 0$.
Iz definicije H_I sledi, da je H_I gladka (razreda $m - |I| = m - k$) hiperploskev, ki je regularna podmnogoterost (saj je definirana z eno funkcijo $\partial^I f$, ki ima neničeln diferencial vzdolž H_I).
Torej izrek že velja za $f|_{H_I} \colon H_I \to \mathbb{R} \Rightarrow |f(\operatorname{Crit} f|_{H_I})| = 0 \Rightarrow |f(\operatorname{Crit} f \cap S_k)| = 0 \ \forall k = 1, \ldots, m - 1$.
Pokazati samo še $|f(\Sigma^m)| = 0$.

$$\operatorname{Crit} f = \Sigma^1 = \underbrace{(\Sigma^1 \setminus \Sigma^2)}_{S_1} \cup \underbrace{(\Sigma^2 \setminus \Sigma^3)}_{S_2} \cup \ldots \cup \Sigma^m = S_1 \cup \ldots \cup S_{m-1} \cup \Sigma^m$$

$|f(S_k)| = 0$, $k = 1, \ldots, m-1$. Na $\sum^m$ so vsi parcialni odvodi f do reda m enaki 0.
$x \in \sum^m$: $f(x') = f(x) + o(|x - x'|^m)$.
Kot prej (za $m = 1$): $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ da je $\forall x \in \sum^m$, $\forall x'$ za katerega velja $|x' - x| < \delta$, velja $|f(x) - f(x')| < \varepsilon \delta^m$. f preslika kroglo $K(x, \delta)$ v interval dolžine $\leq \varepsilon \cdot \delta^m$. Z $N \lessapprox \frac{konst.}{\delta^m}$ kroglami polmera δ pokrijemo množico $\sum^m \Rightarrow |f(\sum^m)| \leq N \cdot \varepsilon \cdot \delta^m \lessapprox \frac{1}{\delta^m} \cdot \varepsilon \cdot \delta^m = \varepsilon \Rightarrow |f(\sum^m)| = 0$.

Dokaz za $N = \mathbb{R}^n$.
1. možnost: podobno kot zgoraj. Začnemo z $n = m$ in indukcija na m, ki narašča. Za $m < n$:

$$M \times \mathbb{R}^{m-n} \supset M \times 0 = M^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n, \qquad |f(M^m)| = 0$$

2. možnost: indukcija na n.
$n = 2$: $(f_1, f_2)\colon M \to \mathbb{R}^2$. Za $f_1\colon M \to \mathbb{R}$ izrek že velja, skoraj vsak $c_1 \in \mathbb{R}$ je regularna vrednost funkcije f_1. $f_{2\{f_1 = c_1\}}$ ima skoraj vsak $c_2 \in \mathbb{R}$ za regularno vrednost. Za tako izbrana c_1, c_2 je $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ regularna vrednost $f = (f_1, f_2)$. Ta argument pokaže, da je množica regularnih vrednosti (c_1, c_2) povsod gosta v $\mathbb{R}^2$. Če je M kompaktna, je ta množica tudi odprta ($\operatorname{Crit} f$ je zaprta, zato kompaktna $\Rightarrow f(\operatorname{Crit} f)$ kompaktna). Ker je $\forall M$ števna unija kompaktnih domen v M, je $f(\operatorname{Crit} f)$ števna unija zaprtih, nikjer gostih množic (1. kategorije).

Splošen primer: $M = \bigcup_j B_j$, $N = \bigcup_j D_j$, $\overline{B}_j$ kompakt, $\overline{D}_j$ kompakt, $f(\overline{B}_j) \subset D_j$. $\overline{B}_j \approx$ kompaktna množica v $\mathbb{R}^m$, $\overline{D}_j \approx$ kompaktna množica v $\mathbb{R}^n$.

$$f(\operatorname{Crit} f) = \bigcup_j f(\operatorname{Crit} f|_{\overline{B}_j})$$

za to pa že vemo, da so 1. kategorije, torej mere 0. $\square$