ANALIZA NA MNOGOTEROSTIH

DOMAČE NALOGE 1.1

1. Dokaži, da ima vsaka topološka mnogoterost izčrpanje

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset \cup_{j=0}^{\infty} K_j = X$$

s kompaktnimi množicami, tako da je K_j vsebovana v notranjosti množice K_{j+1} za vsak $j = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Naj bo X^n topološka mnogoterost in $\mathcal{U} = \{U_\alpha \colon \alpha \in A\}$ neko odprto pokritje. Dokaži, da obstaja končno ali števno pokritje $\{V_j \colon j \in \mathbb{N}\}$ mnogoterosti X, tako da je za vsak $j \in \mathbb{N}$ zaprtje $\overline{V}_j$ kompaktna množica, ki je vsebovana v neki množici U_α ter vsaka kompaktna množica v X seka največ končno mnogo množic V_j. (Pokritje s to lastnostjo se imenuje lokalno končno.) Množice V_j lahko izbereš tako, da so homeomorfne $\mathbb{R}^n$.

3. Konstruiraj gladko sodo funkcijo $f \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$, tako da je $f(x) = 1$ za vsak $x \in [-1, +1]$ in je $f(x) = 0$ za vsak $|x| \geq 2$.

Navodilo: prični s funkcijo $\xi(t) = e^{-1/t}$ za $t > 0$, $\xi(t) = 0$ za $t < 0$. Nato si oglej produkt $g(t) = \xi(t + 1)\xi(-t - 1)$ in integral $h(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$. S pomočjo funkcije h ni težko najti funkcijo f z iskanimi lastnostmi.

4. Za vsak par števil $0 < r < R$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ poišči gladko funkcijo $h \colon \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, ki je identično enaka 1 na krogli $K(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < r\}$ in ima nosilec $\mathrm{supp}(h)$ vsebovan v krogli $K(0, R)$. (Nosilec $\mathrm{supp}(h)$ (support) je najmanjša zaprta množica E z lastnostjo, da je h identično enaka nič na komplementu od E.)

5. Naj bo X mnogoterost razreda $\mathcal{C}^k$ za nek $k \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$. Dokaži, da za vsako odprto pokritje $\mathcal{U} = \{U_\alpha \colon \alpha \in A\}$ obstaja družina $\mathcal{C}^r$ funkcij $f_k \colon X \to [0, 1]$ z naslednjimi lastnostmi:

(i) za vsak $k \in \mathbb{N}$ velja $\mathrm{supp}(f_k) \subset U_\alpha$ za nek $\alpha = \alpha(k)$,
(ii) družina nosilcev $\mathrm{supp}(f_k)$ je lokalno končna,
(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = 1$ za vsak $x \in X$. (Vrsta je dejansko konča vsota na vsaki kompaktni podmnožici v X.)

Družina $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ s temi lastnostmi se imenuje *particija enote* na X, ki je podrejena pokritju $\{U_\alpha\}$.

Date: 21. oktober 2010.

6. Naj bo S enotna sfera v $\mathbb{R}^3$ s koordinatami (x_1, x_2, x_3). Naj bo $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ stereografska projekcija S iz točke $(0,0,1)$ na ravnino $\mathbb{R}^2 = \{x_3 = 0\}$, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ pa stereografska projekcija iz točke $(0,0,-1)$ na isto ravnino. Definirajmo $\overline{\psi} = (\psi_1, -\psi_2)$. Naj bo $z = x + iy$ kompleksna koordinata na $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$. Dokaži, da je prehodna preslikava $\overline{\psi} \circ \phi^{-1}$ na $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ enaka $z \to z^{-1}$. Torej je $(\phi, \overline{\psi})$ kompleksen atlas na S. Pokaži tudi, da je dobljena kompleksna struktura enaka strukturi, ki jo dobimo pri konstrukciji kompleksnega projektivnega prostora $\mathbb{CP}^n$ v primeru $n = 1$.

7. *Möbiusov trak* M dobimo tako, da v pravokotniku $[0, A] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ identificiramo vsako točko $(0, y)$ $(y \in [-1, +1])$ s točko $(A, -y)$ (to so edine identifikacije). Pokaži, da je M ploskev (dvorazsežna mnogoterost) z robom ∂M, ki je homeomorfen krožnici S^1. (Torej M ni homeomorfen cilindru, ki ga dobimo z identifikacijo $(0, y) \sim (A, y)$.) Prepričaj se, da ima M eno samo stran, to je, pri obhodu ploskve vzdolž središčne krožnice $[0, A] \times \{0\}$ pridemo z ene strani na drugo. Ploskev s tako lastnostjo se imenuje *neorientabilna.*

Če Möbiusov trak M in 2-disk D^2 zlepimo vzdož njunih robnih krožnic ∂M in ∂D^2, dobimo ploskev, homeomorfno realni projektivni ravnini $\mathbb{RP}^2$. Če dva Möbiusova trakova M_1 in M_2 zlepimo vzdolž njunih robnih krožnic, dobimo sklenjeno ploskev, ki je homeomorfna Kleinovi steklenici (glej nalogo 7). Ali znaš pojasniti ta dejstva?

7. *Kleinova steklenica* je neorientabilna kompaktna ploskev, ki jo dobimo tako, da v pravokotniku $[0, 1] \times [-1, 1]$ identificiramo $(x, -1) \sim (x, 1)$ (za vsak $x \in [0, 1]$) ter $(0, y) \sim (1, -y)$ (za vsak $y \in [-1, 1]$). K ne drži vode, problem je tudi, da je sploh ne moremo vložiti kot ploskev v $\mathbb{R}^3$.

Dodaj podrobnosti v naslednji konstrukciji vložitve Kleinove steklenice v $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ (W. Rudin: Totally real Klein bottles in $\mathbf{C}^2$. Proc. Amer. Math. Soc., 82 (1981), 653-654.) Naj bosta (θ, ϕ) realni koordinati na $\mathbb{R}^2$. Izberemo števili $a > b > 0$ in definiramo

$$g(\theta, \phi) = (a + b \cos \phi) e^{i\theta}, \quad h(\phi) = \sin \phi + i \sin 2\phi.$$

Naj bo $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^2$, $F(\theta, \phi) = (z, w)$, definirana s predpisom

$$z = g(\theta, \phi)^2, \quad w = g(\theta, \phi) h(\phi).$$

Dokaži da velja $F(\theta, \phi + 2\pi) = F(\theta, \phi) = F(\theta + \pi, -\phi)$. Torej F identificira nasprotna para stranic v pravokotniku

$$Q = \{(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le \theta \le \pi,\ -\pi \le \phi \le \pi\} \subset \mathbb{R}^2$$

na enak način kot pri Kleinovi steklenici. Pokaži tudi, da so to edine identifikacije točk v Q. Nato izračunaj kompleksno Jacobijevo determinanto

$$z_\theta w_\phi - z_\phi w_\theta = 2g^2 g_\theta h' = 2ig^3 h' \neq 0.$$

Ker je le-ta povsod neničelna, je $F \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^2$ imerzija. Torej je $F(\mathbb{R}^2) = K \subset R^4$ vložena ploskev, ki je homemorfna Kleinovi steklenici.