ANALIZA NA MNOGOTEROSTIH

DOMAČE NALOGE 1.2

Naloga 1. Naj bo X Hausdorffov topološki prostor in $\sim$ odprta ekvivalenčna relacija na X. Dokaži, da je kvocientni prostor $Y = X/\sim$ Hausdorffov natanko tedaj, ko je graf relacije $\sim$ zaprta množica v $X \times X$.

Naloga 2. (Grassmanove mnogoterosti) Naj bo $1 \leq k < n$. Označimo z $V(k,n)$ množico vseh urejenih k-teric $x = (x^1, \ldots, x^k)$ linearno neodvisnih vektorjev $x^1, \ldots, v^k \in \mathbb{R}^n$. Torej lahko $V(k,n)$ identificiramo z množico vseh $n \times k$ matrik maksimalnega ranga k. Vsak $x \in V(k,n)$ določa linearno lupino $\operatorname{span} x$, ki je k-dimenzionalen vektorski podprostor v $\mathbb{R}^n$. Definirajmo relacijo

$$x \sim y \Leftrightarrow \operatorname{span} x = \operatorname{span} y,$$

kjer span označuje linearno lupino.

(1) Preveri, da je $V(k,n)$ odprta podmnožica v $\mathbb{R}^{nk}$ in da je $\sim$ ekvivalenčna relacija.
(2) Pokaži, da je $x \sim y$ natanko tedaj, ko obstaja matrika $A \in GL(k,\mathbb{R})$, tako da je $xA = y$ (matrični produkt).
(3) Dokaži, da je relacija $\sim$ odprta in zaprta.
(4) Naj bo $\pi \colon V(k,n) \to G(k,n) = V(k,n)/\sim$ kvocientna projekcija. Torej je $G(k,n)$ množica vseh k-dimenzionalnih realnih podprostorov v $\mathbb{R}^n$. V posebnem je $G(1,n) = \mathbb{RP}^{n-1}$.
(5) Konstruiraj na $G(k,n)$ strukturo realno analitične (realno algebraične) mnogoterosti, tako da je projekcija π realno analitična. Prostori $G(k,n)$ opremljeni s to mnogoterostno strukturo se imenujejo *Grassmanove mnogoterosti*. Kolikšna je dimenzija $G(k,n)$? (Uporabi podobno idejo kot pri konstrukciji projektivnih prostorov.)
(6) Dokaži, da preslikava $\Lambda \to \Lambda^{\perp}$, ki priredi podprostoru $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ njegov ortogonalni komplement, inducira realno analitičen izomorfizem $G(k,n)$ na $G(n-k,n)$. V posebnem je torej projektivni prostor $\mathbb{RP}^{n-1} = G(1,n)$ izomorfen Grassmanovi mnogoterosti $G(n-1,n)$, to je množici vseh hiperravnin v $\mathbb{R}^n$.
(7) Podobno konstruiramo kompleksne Grassmanove mnogoterosti, ki so kompleksne algebraične mnogoterosti.

Date: 4. november 2010.

Naloga 3. Naj bo $q > 0$ pozitivno realno število, $q \neq 1$. Aditivna grupa $\mathbb{Z}$ celih števil naj deluje na prostoru $\mathbb{R}^n_* = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ s predpisom

$$\mathbb{Z} \ni k \mapsto \theta_k \in \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^n_*), \quad \theta_k(x) = q^k x \ (x \in \mathbb{R}^n_*,\ k \in \mathbb{Z}).$$

Pokaži, da je to delovanje povsem nezvezeno in brez fiksnih točk. Kateri standardni mnogoterosti je izomorfen prostor orbit?

Naloga 4. Izberimo k linearno neodvisnih vektorjev $v_1, \ldots, v_k$ v $\mathbb{R}^n$. Grupa $\mathbb{Z}^k$ (direktna vsota k kopij grupe $\mathbb{Z}$) naj deluje na $\mathbb{R}^n$ s translacijami

$$J = (j_1, \ldots, j_k) \in \mathbb{Z}^k \mapsto \theta_J(x) = x + j_1 v_1 + \cdots + j_k v_k.$$

Dokaži, da je to delovanje popolnoma nezvezno in brez fiksnih točk. Kaj je kvocientna mnogoterost (prostor orbit)? Posebej si oglej primer $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

Naloga 5. Grupa $\mathbb{Z}$ naj deluje na krožnici $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ kot grupa rotacij z generatorjem

$$\sigma(z) = e^{2\pi i \alpha} z, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Za katera števila α je to delovanje povsem nezvezno? Kaj je v tem primeru kvocientni prostor?

(Navodilo: pokaži, da to delovanje ustreza grupi translacij na univerzalnem krovnem prostoru $\mathbb{R} \to S^1$, $x \to e^{2\pi i x}$.)