ANALIZA NA MNOGOTEROSTIH

DOMAČE NALOGE 4.1

Naloga 1. Naj bo G povezana Liejeva grupa in $\mathfrak{g}$ njena Liejeva algebra. Dokaži, da je G Abelova natanko tedaj, ko je $[v, w] = 0$ za vsak $v, w \in \mathfrak{g}$.

Naloga 2. Naj bosta G in G' Liejevi grupi in $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ njuni Liejevi algebri. Gladka preslikava $F\colon G \to G'$, ki je hkrati homomorfizem grup, se imenuje *homomorfizem Liejevih grup*. Dokaži:

(1) za vsako levo invariatno vektorsko polje V na G obstaja levo invariantno polje $\widetilde{V}$ na G', tako da velja $dF_g V_g = \widetilde{V}_{F(g)}$ za vsak $g \in G$.
(2) Diferencial $dF_1\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ v identiteti $1 = 1_G \in G$ je homomorfizem Liejevih algeber.
(3) Rang preslikave F je konstanten (neodvisen od točke $g \in G$).
(4) Jedro
$$H = \ker F = \{g \in G\colon F(g) = 1_{G'}\}$$
je Liejeva podgrupa grupe G.

Posebej si oglej si naslednje primere:

- $F\colon \mathbb{R}^n \to (S^1)^n = T^n$,
$$F(x_1, \ldots, x_n) = \left(e^{ix_1}, \ldots, e^{ix_n}\right).$$
- $F\colon GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* = GL_1(\mathbb{R})$, $F(A) = \det A$.
- Vložitev $SL_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow GL_n(\mathbb{R})$.

Naloga 3. Naj bo G Liejeva grupa in $\sigma\colon G \to G$ difeomorfizem $\sigma(g) = g^{-1}$, $g \in G$ (invertiranje na grupi G).

Dokaži, da je za vsako levo invariantno vektorsko polje v na G prirejeno vektorsko polje $w = \sigma_* v$ desno invariantno. Dokaži tudi, da je preslikava $v \mapsto \sigma_* v$ homomorfizem Liejeve algebre levo invariantnih polj na Liejevo algebro desno invariantnih polj na G.

Posebej si oglej σ_* v primeru grupe $G = GL_n(\mathbb{R})$.

Naloga 4. Dokaži, da sta grupi

$$\begin{aligned} \operatorname{Aut}\mathbb{C} &= \{z \mapsto \alpha z + \beta,\ \alpha \in \mathbb{C}^*,\ \beta \in \mathbb{C}\} \\ \operatorname{Aut}\mathbb{CP}^1 &= \{[z\colon w] \mapsto [\alpha z + \beta w\colon \gamma z + \delta w]\colon \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C},\ \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0\} \end{aligned}$$

kompleksni Liejevi grupi kompleksne dimenzije 2 oziroma 3. Prav tako pokaži, da je grupa avtomorfizmov diska $\mathbb{D}$,

$$\operatorname{Aut}\mathbb{D} = \left\{ z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z} : a \in \mathbb{D},\ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

realna Liejeva grupa realne dimenzije 3.

V vseh primerih zapiši grupno operacijo v naravnih koordinatah na grupi (npr. (α, β) v prvem primeru in podobno v ostalih).

Naloga 5. Pokaži, da je specialna linearna grupa

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R})\colon \det A = 1\}$$

realno analitična hiperploskev v R^{n^2}.

Poišči njeno Liejevo algebro $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

Ista naloga za grupo $SL_n(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C})$.

Naloga 6. Dokaži, da je ortogonalna grupa

$$O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R})\colon A\cdot A^t = I\}$$

kompaktna realno analitična Liejeva podgrupa grupe $GL_n(\mathbb{R})$. Določi njeno dimenzijo.

Poišči njeno Liejevo algebro $\mathfrak{o}(n) \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.

Pokaži, da ima $O(n)$ dve povezani komponenti in da je povezana komponenta identitete I enaka Liejevi grupi

$$SO(n) = \{A \in O(n)\colon \det A = 1\} = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R}).$$

Navodilo: zapiši enačbo $F(A) = A\cdot A^t = I$ v komponentah in si oglej rang dobljenega sistema enačb v identiteti $I \in GL_n(\mathbb{R})$. Nato pokaži, da je rang preslikave F konstanten na vlaknu $F^{-1}(I) = O(n)$.

Naloga 7. Dokaži, da je unitarna grupa

$$U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C})\colon A\cdot \bar{A}^t = I\}$$

kompaktna realno analitična Liejeva podgrupa grupe $GL_n(\mathbb{C})$. Določi njeno dimenzijo. Ali je $U(n)$ tudi *kompleksna* (= holomorfna) Liejeva grupa?

Poišči njeno Liejevo algebro $\mathfrak{u}_n \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.