ANALIZA NA MNOGOTEROSTIH

NALOGE 5.1

Naloga 1. (Injektivne imerzije in vložitve.) Naj bo $f\colon M \hookrightarrow N$ injektivna $\mathcal{C}^r$ imerzija mnogoterosti M v mnogoterost N. Sliko $f(M) \subset N$ opremimo z relativno topologijo, podedovano iz ambientne mnogoterosti N. Dokaži:

Trditev: Slika $f(M)$ je $\mathcal{C}^r$ podmnogoterost v N natanko tedaj, ko je preslikava $f\colon M \to f(M)$ homeomorfizem M na $f(M)$.

Taka preslikava se imenuje *vložitev* M v N.

Posledica: Če je $f\colon M \hookrightarrow N$ injektivna imerzija, ki je hkrati zaprta preslikava, potem je f vložitev M na zaprto podmnogoterost $f(M) \subset N$.

Posledica: Slika vsake *prave injektivne imerzije* je zaprta podmnogoterost. Če je M kompaktna, je vsaka injektivna imerzija $M \hookrightarrow N$ vložitev.

Naloga 2. (Whitneyev vložitveni izrek.) Naj bo M kompaktna mnogoterost dimenzije m in razreda $\mathcal{C}^r$ za nek $r \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$. Dokaži

Izrek: Obstaja $\mathcal{C}^r$ vložitev $f\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ in $\mathcal{C}^r$ imerzija $f\colon M \looparrowright \mathbb{R}^{2m}$.

Navodilo: Najprej konstruiraj vložitev $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ za nek $n >> 0$ s pomočjo lokalnih koordinat in particije enote. Nato pokaži

Trditev: Če je $M \subset \mathbb{R}^n$ podmnogoterost dimenzije m.

- Če je $n > 2m+1$, potem obstaja linearna projekcija $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, tako da je zožitev $\pi|_M\colon M \to \mathbb{R}^{n-1}$ injektivna imerzija.
- Če je $n > 2m$, lahko π izberemo tako, da je $\pi|_M$ imerzija.

Tako projekcijo lahko najdemo s pomočjo posebnega primera transverzalnostnega izreka za gladke preslikave mnogoterosti v višje dimenzionalne mnogoterosti (slika ima mero nič).

Naloga 3. (Morsejeve funkcije) Naj bo f gladka funkcija na mnogoterosti M. Kritična točka $p \in M$ funkcije f (torej točka z $df_p = 0$) se imenuje *nedegenerirana* ali *Morsejeva* točka funkcije f, če je njena Hessejeva matrika $H_f(p) = \left(\frac{\partial^2 f(p)}{\partial x_j \partial x_k}\right)$ nedegenerirana v smislu, da so vse njene lastne vrednosti različne od 0.

Funkcija f je *Morsejeva funkcija na* M, če so vse njene kritične točke Morsejeve.

Morsejeve funkcije imajo bistveno vlogo pri razumevanje topološke strukture mnogoterosti kot CW-kompleksov.

(1) Dokaži, da je ta lastnost neodvisna od izbire lokalnih koordinat.

(2) Dokaži, da lahko v primerno izbranih lokalnih koordinatah v okolici Morsejeve točke zapišemo f v obliki

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = f(0) + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j^2 + o(|x|^2)$$

kjer je $\epsilon_j = \pm 1$ za vsak j. (Tudi ostanek $o(|x|)^2$ lahko odstranimo s primerno izbiro koordinat, to je t.i. Morsejeva lema.)

(3) Naj bo f gladka funkcija na odprti množici $U \subset \mathbb{R}^n$. Dokaži, da je f Morsejeva natanko tedaj, ko je $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ regularna vrednost gradienta

$$g = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) : U \to \mathbb{R}^n.$$

(4) Naj bo f kot zgoraj. Dokaži, da je za skoraj vsak izbor vektorja $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ naslednja funkcija Morsejeva:

$$f_a(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} a_j x_j.$$

Navodilo: Uporabi transverzalnostni izrek za gradientno preslikavo.

(5) Naj bo $M \subset \mathbb{R}^n$ gladka podmnogoterost in $f\colon M \to \mathbb{R}$ gladka funkcija. Dokaži, da je za skoraj vsak $a \in \mathbb{R}^n$ funkcija f_a v (3) Morsejeva na M.

(6) Naj bo M kompaktna gladka mnogoterost. Dokaži, da lahko vsako gladko funkcijo $f\colon M \to \mathbb{R}$ poljubno dobro aproksimiramo z Morsejevimi funkcijami.