ANALIZA NA MNOGOTEROSTIH

DOMAČE NALOGE 2.1

Naloga 1. Izračunaj tok in fundamentalno domeno naslednjih vektorskih polj:

(1) $V(x) = x^{n+1}\frac{\partial}{\partial x}$ na $\mathbb{R}$.
(2) $V(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ na $\mathbb{R}^2$.
(3) $V(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ na $\mathbb{R}^2$.
(4) $V(x,y) = a(x)\frac{\partial}{\partial y}$ na $\mathbb{R}^2$.
(5) $V(x,y) = a(x)y^{n+1}\frac{\partial}{\partial y}$ na $\mathbb{R}^2$.
(6) $V(x,y) = \lambda(xy)\left(x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}\right)$ na $\mathbb{R}^2$.
(7) $V(x,y) = (d\lambda x + y^d)\frac{\partial}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial}{\partial y}$ na $\mathbb{R}^2$.

Naloga 2. Naj bo V gladko vektorsko polje na mnogoterosti X in $p \in X$ točka, v kateri je $V_p \neq 0$. Denimo, da tok $\phi_t(p)$ obstaja za vsak $t \in [0, t_0]$ za neko pozitivno število $t_0 > 0$. Dokaži, da obstaja $\epsilon > 0$ in lokalni difeomorfizem

$$g\colon (-\epsilon, t_0 + \epsilon) \times (-\epsilon, +\epsilon)^{n-1} \to X,$$

tako da velja

$$g_*\frac{\partial}{\partial x_1} = V, \quad g(t, 0, \ldots, 0) = \phi_t(p),\ t \in (-\epsilon, t_0 + \epsilon).$$

Če je $\{\phi_t(p)\colon t \in [0, t_0]\}$ vložen lok, potem lahko najdemo difeomorfizem g z zgornjo lastnostjo. To pomeni, da lahko vektorsko polje izravnamo vzdolž tokovnice s primerno izbiro koordinat.