ANALIZA NA MNOGOTEROSTIH

DOMAČE NALOGE 2.2

Naloga 1. Naj bo $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ poljubna gladka funkcija. Oglejmo si vektorska polja

$$V_j(x) = -\frac{\partial\rho}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial\rho}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

1. Dokaži, da je vsako polje V_j tangentno na nivojne ploskve funkcije ρ. Dokaži tudi, da so polja $V_1, \ldots, V_{n-1}$ linearno neodvisna v vsaki točki x, kjer je $\frac{\partial\rho}{\partial x_n} \neq 0$.

2. Izračunaj komutatorje $[V_j, V_k]$.

3. Naj bodo zgornja polja linearno neodvisna na neki odprti množici $U \subset \mathbb{R}^n$. Za vsak $x \in U$ naj bo $E_x = \mathrm{Lin}\{V_1(x), \ldots, V_{n-1}(x)\}$ njihova linearna lupina. Dokaži, da je E involutiven sveženj.

Naloga 2. Na $\mathbb{R}^4$ s koordinatami (x, y, u, v) definiramo vektorski polji

$$V = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} - v\frac{\partial}{\partial u} + u\frac{\partial}{\partial v}, \qquad W = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} - x\frac{\partial}{\partial u} - y\frac{\partial}{\partial x}.$$

(a) Izračunaj komutator $[V, W]$.
(b) Določi najmanjši involutiven podsveženj $E \subset T\mathbb{R}^4$, na katerega sta polji V, W tangentni.
(c) Poišči maksimalne integralne mnogoterosti svežnja E.
(d) Dokaži, da je tangentni sveženj tridimenzionalne sfere trivialen.

Naloga 3. Naj bo

$$V = a(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + c(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}$$

gladko vektorsko polje na $\mathbb{R}^3$. Za vsako točko $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ naj bo $E_p = V_p^{\perp} \subset T_p\mathbb{R}^3$ ortogonalni komplement vektorja V_p glede na običajen skalarni produkt. Označimo z $E \subset T\mathbb{R}^3$ podsveženj z vlakni E_p.

Pri katerem pogoju na vektorsko polje V je E involutiven podsveženj tangentnega svežnja $T\mathbb{R}^3$? Kaj so v tem primeru njegove maksimalne integralne mnogoterosti?