ANALIZA NA MNOGOTEROSTIH

DOMAČE NALOGE 3.1

Naloga 1. Naj bosta $\pi\colon E \to X$ in $\pi'\colon E' \to X$ gladka vektorska svežnja nad mnogoterostjo X in naj bo $\phi\colon E \to E'$ gladek morfizem svežnjev z lastnostjo, da je dimenzija vektorskega podprostora $\Phi_x(E_x) \subset E'_x$ neodvisna od bazne točke $x \in X$. Dokaži:

(1) jedro $\ker \Phi = \{e \in E\colon \Phi(e) = 0\}$ je gladek vektorski podsveženj svežnja E, in
(2) slika $\Phi(E)$ je gladek vektorski podsveženj svežnja E'.

Naloga 2. Naj bo $\pi\colon E \to X$ gladek vektorski sveženj. Pokaži, da je njegova zožitev $E|_M \to M$ na gladko podmnogoterost $M \subset X$ gladek vektorski sveženj nad M. Nato s pomočjo particije enote pokaži

Izrek. Vsak prerez $f\colon M \to E|_M$ nad zaprto gladko podmnogoterostjo $M \subset X$ se razširi do gladkega prereza $F\colon X \to E$. Razširitev F lahko izberemo tako, da je njen nosilec vsebovan v predpisani odprti okolici $V \subset X$ podmnogoterosti M.

Naloga 3. Naj bo X povezana gladka mnogoterost. Dokaži, da za poljubni dve točki $p, q \in X$ obstaja difeomorfizem $f\colon X \to X$, ki zadošča $f(p) = q$. Torej deluje grupa $\mathrm{Diff}(X)$ tranzitivno na X.

Ali velja podoben rezultat za več točk hkrati?

Navodilo. Izberi gladko vektorsko polje V vzdolž gladkega vloženega loka $C \subset X$, ki povezuje p in q, tako da tok polja V v času $t = 1$ preslika točko p v točko q. Nato uporabi izrek o razširitvi iz naloge 2.

Naloga 4. Naj bo M gladka zaprta podmnogoterost mnogoterosti X. Vektorski sveženj $\nu = N_{M/X} = TX|_M/TM$ se imenuje *normalni sveženj M v X*. Identificirajmo ν s podsvežnjem v $TX|_M$, tako da velja

$$TX|_M = TM \oplus \nu.$$

Označimo z 0_p ničelni element vlakna ν_p v $p \in M$ in z $M_0 = \{0_p\colon p \in M\} \subset \nu$ ničelni prerez svežnja ν. Dokaži naslednji

Izrek o cevasti okolici. Naj bo M sklenjena (= kompaktna in brez roba) gladka podmnogoterost mnogoterosti X z normalni svežnjem ν. Obstaja odprta okolica $V \subset \nu$ ničelnega prereza in difeomorfizem $F\colon V \to U$ na neko odprto množico $U \subset X$, ki zadošča $F(0_p) = p$ za vsak $p \in M$ (torej je $F(M_0) = M \subset U$).

Navodilo. Izberemo gladka vektorska polja $V_1, \dots, V_m$ na X, ki generirajo T_xX za vsak $x \in M$. Naj bo ϕ_t^j tok polja V_j. Preslikava

$$F(x, t_1, \dots, t_m) = \phi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \phi_{t_m}^m(x), \qquad x \in X,\ t_j \in \mathbb{R} \tag{0.1}$$

je definirana in gladka na neki odprti okolici množice $X \times \{0\}^m$ v trivialnem svežnju $X \times \mathbb{R}^m$ ter zadošča lastnostim

$$F(x, 0) = x, \quad \frac{\partial}{\partial t_j} F(x,t)\big|_{t=0} = V_j(x), \quad x \in X,\ j = 1, \dots, m.$$

Ker vektorji $V_1(x), \dots, V_m(x)$ napenjajo tangentni prostor T_xX v vsaki točki $x \in M$, je F submerzija vzdolž $M \times \{0\}^m$. Naj bo

$$\Theta_x = \partial_t|_{t=0} F(x,t) \colon \mathbb{R}^m \to T_xX, \quad x \in M. \tag{0.2}$$

Pokaži, da je množica $E' \subset M \times \mathbb{R}^m$ z vlakni

$$E'_x = \Theta_x^{-1}(T_xM), \quad x \in M,$$

gladek vektorski podsveženj v $M \times \mathbb{R}^m$. Naj bo E nek komplementarni podsveženj, tako da je $M \times \mathbb{R}^m = E \oplus E'$.

Dokaži, da je E izomorfen normalnemu svežnju $\nu = N_{M/X}$ in da je preslikava $F \colon E \to X$ difeomorfizem neke okolice ničelnega prereza na okolico M v X.

Naloga 5. Dokaži naslednjo posledico izreka o obstoju cevaste okolice iz naloge 4.

Posledica. Naj bo M sklenjena gladka podmnogoterost mnogoterosti X. Obstaja odprta okolica $U \subset X$ podmnogoterosti M in gladka preslikava $\pi \colon U \to M$, za katero velja $\pi(p) = p$ za vsak $p \in M$. (Torej je π gladka retrakcija U na M.

S primernim izborom U lahko zagotovimo, da je π celo stroga deformacijska retrakcija U na M, to je, obstaja homotopija gladkih preslikav $\psi_t \colon U \to U$ $(t \in [0,1])$ od $\psi_0 = Id|_U$ do $\psi_1 = \pi|_U$.

Naloga 6. Naj bo $\pi \colon E \to X$ gladek vektorski sveženj. Za vsako točko $x \in X$ označimo z E_x^* dualni prostor vektorskega prostora E_x. Dokaži, da je dualni sveženj $E^* = \cup_{x \in X} E_x^*$ gladek vektorski sveženj. Če je E podan z 1-kociklom $g_{ij} \colon U_{ij} \to GL_n(\mathbb{R})$ na pokritju $\mathcal{U} = \{U_i\}$ mnogoterosti X, potem je E^* podan na istem pokritju z 1-kociklom

$$g'_{ij}(x) = (g_{ij}(x)^t)^{-1}.$$

(Pri tem g^t pomeni transponiranko matrike g.)