Diferencialna geometrija - DN

Ocenjevanje:

- Za pozitivno oceno sta potrebni vsaj dve točki.
- Za oceno 9 so potrebne štiri točke (in nerešena zadnja naloga).
- Za najvišjo oceno so potrebne štiri točke in rešena zadnja naloga.

Prosim, da naloge rešujete samostojno. Za vprašanja/nasvete o nalogah : `bojan.gornik@fmf.uni-lj.si`.

1. [1] Naj bo f gladka realna funkcija na $\mathbb{R}^4$. Dana je 1-forma na $\mathbb{R}^4$

$$\omega = 2f(w)xy\,dx + x^2w^2\,dy + w\,dz - z\,dw.$$

   Na množici $\Omega \subseteq \mathbb{R}^4$, kjer je ω neničelna, predpis

$$p \mapsto \ker \omega_p$$

   podaja distribucijo kodimenzije 1, ki jo imenujmo Σ. Določi vse f, pri katerih je Σ integrabilna in pri teh f tudi poišči integralne (hiper)ploskve.

2. [1] Naj bo V končnorazsežen vektorski prostor, $0 \neq \alpha \in V^*$ ter $\beta \in \Lambda^2 V^*$. Dokaži, da je $\alpha \wedge \beta = 0$ natanko tedaj, ko za vsaka $v, w \in \ker \alpha$ velja $\beta(v, w) = 0$.

   Opomba: Dokaz implikacije v vsako smer je vreden $\frac{1}{2}$ točke. Lažji je dokaz implikacije $\Rightarrow$.

3. Zapiši prehodne preslikave za naslednje svežnje nad $\mathbb{R}P^2$:

   (a) [$\frac{1}{3}$ točke] Kanonični sveženj ξ.

   Opomba: To je sveženj iz predpredzadnje naloge z vaj.

   (b) [$\frac{1}{3}$ točke] Ortogonalni komplement kanoničnega svežnja kot podsvežnja v trivialnem svežnju $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}^3$: $\xi^\perp$.

   Opomba: To je realna verzija svežnja iz zadnje naloge z vaj.

   (c) [$\frac{1}{3}$ točke] Kotangentni sveženj $T^*\mathbb{R}P^2$.

4. [1]Vpeljimo naslednjo oznako: če je $n \in \mathbb{N}$ in ℓ enorazsežen kompleksen podprostor v $\mathbb{C}^3$ napet z vektorjem $[z_1, z_2, z_3]^T \in \mathbb{C}^3$, naj oznaka ℓ^n pomeni enorazsežen kompleksen podprostor v $\mathbb{C}^3$, ki je napet z vektorjem $[z_1^n, z_2^n, z_3^n]^T \in \mathbb{C}^3$.

Dan je kompleksen sveženj E nad $\mathbb{C}P^2$

$$E := \{(\ell, v) \in \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}^3 \,|\, v \in \ell^n\}.$$

(a) Če prereze svežnja identificiramo s preslikavami $s : \mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}^3$, za katere velja $s(\ell) \in \ell^n$, dokaži da naslednji predpis podaja kovarianten odvod na E

$$\nabla s = P_{\ell^n}(ds).$$

Tu ds pomeni stolpec vnanjih odvodov komponent s in $P_{\ell^n} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ ortogonalno projekcijo na ℓ^n glede na običajen skalarni produkt v $\mathbb{C}^3$.

(b) Nad odprto množico $\{[z_1 : z_2 : z_3] \,|\, z_1 \neq 0\}$ izberi trivializacijo E in glede nanjo določi (kompleksno) 1-formo ω, da bo veljalo $\nabla = d + \omega$.

(c) Glede na trivializacijo iz (b) zapiši še ukrivljenost in izračunaj

$$\int_{i(\mathbb{C}P^1) \subseteq \mathbb{C}P^2} c_1(E).$$

Tu je $i : \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^2, i([z_1 : z_2]) = [z_1 : z_2 : 0]$.

5. Dani so naslednji kompleksni svežnji nad $\mathbb{C}P^n$:

   - Kanonični sveženj: ξ.
   - Ortogonalni komplement kanoničnega svežnja: $\xi^\perp$.
   - Tangentni sveženj: $T\mathbb{C}P^n$. Pozor: v tej nalogi na tangentni sveženj gledamo kot na kompleksen vektorski sveženj nad $\mathbb{C}P^n$ na naslednji način: če zapišes prehodne matrike za tangentni sveženj kot Jacobijeve matrike prehodnih preslikav standardnega gladkostnega atlasa za $\mathbb{C}P^n$ v običajni kompleksni pisavi, so le-te očitno iz $GL(n, \mathbb{C})$, torej podajajo kompleksen vektorski sveženj.

   Uvedimo še naslednjo terminologijo: če je $\nabla^{(1)}$ kovariantni odvod na vektorskem svežnju E_1 nad gladko mnogoterostjo M ter $\nabla^{(2)}$ kovariantni odvod na vektorskem svežnju E_2 nad M, je s predpisom

$$\langle \nabla\alpha, \alpha_1 \rangle = \nabla^{(2)}\langle \alpha, \alpha_1 \rangle - \langle \alpha, \nabla^{(1)}\alpha_1 \rangle, \quad \forall \alpha \in \Gamma(\mathrm{Hom}(E_1, E_2)), \alpha_1 \in \Gamma(E_1),$$

   podan kovariantni odvod na vektorskem svežnju $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ (tega ni treba dokazovati). Imenujmo ga *z* $\nabla^{(1)}, \nabla^{(2)}$ *porojeni kovariantni odvod na* $\mathrm{Hom}(E_1, E_2)$.

   Opomba: Če je $\beta \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ ter $\gamma \in V_1$, potem smo označili $\langle \beta, \gamma \rangle = \beta(\gamma)$.

(a) Podajmo preslikavo vektorskih svežnjev

$$\Phi : \mathrm{Hom}(\xi, \xi^{\perp}) \to T\mathbb{C}P^n$$

z naslednjim predpisom: naj bo $\alpha \in \mathrm{Hom}(\ell, \ell^{\perp})$, kjer je $\ell \in \mathbb{C}P^n$ enorazsežen vektorski podprostor $\mathbb{C}^{n+1}$. Izberimo poljuben neničeln $v \in \ell$ in definirajmo naslednjo pot

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}P^n, \quad t \mapsto [v_1 + t\alpha(v)_1 : v_2 + t\alpha(v)_2 : \ldots : v_{n+1} + t\alpha(v)_{n+1}].$$

Ta pot podaja tangentni vektor v točki $\ell \in \mathbb{C}P^n$, ki ga proglasimo za $\Phi(\ell)$.

Dokaži, da smo tako dobro definirali izomorfizem (kompleksnih) vektorskih svežnjev $\mathrm{Hom}(\xi, \xi^{\perp})$ in $T\mathbb{C}P^n$.

(b) Nad odprto množico $\{[z_1 : z_2 : \ldots : z_{n+1}] \,|\, z_1 \neq 0\}$ izberi trivializacijo svežnja $\mathrm{Hom}(\xi, \xi^{\perp})$ in glede nanjo določi $n \times n$ matriko (kompleksnih) 1-form ω, da bo veljalo $\nabla = d + \omega$, kjer je ∇ kovariantni odvod na $\mathrm{Hom}(\xi, \xi^{\perp})$ porojen s projekcijskima kovariantnima odvodoma na ξ ter $\xi^{\perp}$ (gl. vaje).

(c) Določi še ukrivljenost in izračunaj

$$\int_{i(\mathbb{C}P^1) \subseteq \mathbb{C}P^n} c_1(T\mathbb{C}P^n).$$

Tu je $i : \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^n, i([z_1 : z_2]) = [z_1 : z_2 : 0 : \ldots : 0]$.