Jasna Prezelj

DINAMIČNI SISTEMI

ZA DRUGO BOLONJSKO STOPNJO

Slika 0.1: Branje na lastno odgovornost

Ljubljana 2014

Kazalo

1. Sistemi linearnih diferencialnih enačb

1. Teorija stabilnosti za sisteme linearnih enačb s konstantnimi koeficienti

Definicija 1.2. *Sistem n linearnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti je sistem*

$$\dot{x} = Ax + b(t). \tag{1.1}$$

kjer je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrika in b (zvezna) vektorska funkcija.

Matrika $\operatorname{Exp}(At)$ je fundamentalna matrika sistema (fundamentalna rešitev). Partikularno rešitev poiščemo z metodo variacije konstant, ki pravi, da je $x_p(t) = \operatorname{Exp}(At)c(t)$. Rešitev Cauchyjeve naloge

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

je

$$x(t) = \operatorname{Exp}(At)x_0.$$

Odvajamo, upoštevamo, da je $\operatorname{Exp}(At)' = A\operatorname{Exp}(At)$, vstavimo v enačbo in dobimo

$$\begin{aligned}
&x_p'(t) = \operatorname{Exp}(At)'c(t) + \operatorname{Exp}(At)c'(t) = A\operatorname{Exp}(At)c(t) + b(t),\\
&\operatorname{Exp}(At)c'(t) = b(t),\\
&c'(t) = \operatorname{Exp}(-At)b(t),\\
&c(t) = \int_{t_0}^{t} \operatorname{Exp}(-As)b(s)\,ds
\end{aligned}$$

Splošna rešitev je dana s formulo

$$x(t) = \operatorname{Exp}(At)\int_{t_0}^{t} \operatorname{Exp}(-As)b(s)\,dt + \operatorname{Exp}(At)c,$$

kjer je c konstanten vektor.

Drug način, kako pridemo do rešitev homogenega sistema, je Jordanova forma. Naj bo λ k-kratna lastna vrednost in v_i^λ, $i = 1, \ldots, j$, $j < k$ ena od pripadajočih verig korenskih vektorjev: $(A - \lambda I)v_i^\lambda = v_{i-1}^\lambda$. Potem so vektorji oblike $e^{Ax}v_i^\lambda$, kjer so v_i vsi korenski vektorji, ki tvorijo bazo lastnega podprostora, ki pripada lastni vrednosti λ in λ teče po vseh lastnih vrednostih, baza prostora rešitev. Imenovali jih bomo *posplošeni lastni vektorji*. Če jih izračunamo, dobimo

$$
\begin{aligned}
e^{At}v_i^\lambda &= e^{\lambda t}e^{t(A-\lambda I)}v_i^\lambda = && (1.2)\\
&= e^{\lambda t}\sum_0^\infty (A-\lambda I)^n \frac{t^n}{n!}v_i^\lambda = && (1.3)\\
&= e^{\lambda t}\sum_0^i \frac{t^n}{n!}v_{i-n}^\lambda = && (1.4)\\
&= e^{\lambda t}\left(v_i^\lambda + v_{i-1}^\lambda t + \ldots v_1^\lambda \frac{t^{i-1}}{(i-1)!}\right). && (1.5)
\end{aligned}
$$

Podprostor, ki ga generirajo posplošeni lastni vektorji, ki pripadajo eni lastni vrednosti, bomo imenovali posplošeni lastni podporostor. Posplošeni lastni podprostor je invarianten za A (in s tem za $\mathrm{Exp}(At)$).

Če je matrika realna in lastna vrednost λ kompleksna s posplošenim lastnim vektorjem v, je njena konjugiranka tudi lastna vrednost in $\bar{v}$ njen lastni vektor. Zato bazo vektorskega prostora izberemo tako, da lahko lastne in korenske vektorje nadomestimo z njihovimi realnimi oz. imaginarnimi deli in tako dobimo bazo iz realnih vektorjev: če sta w in $\bar{w}$ posplošena lastna vektorja za kompleksni lastni vrednosti λ in $\bar{\lambda}$, bomo za bazna vektorja vzeli $u = \mathrm{Re}\, w$ in $v = \mathrm{Im}\, w$. Iz tega takoj dobimo

Posledica 1.3. *Vsaka komponenta rešitve sistema je linearna kombinacija funkcij*

$$t^k e^{at}\cos bt \ \textit{ in } \ t^k e^{at}\sin bt.$$

Dokaz. Očitno. ♢

Za linearni sistem $\dot{x} = Ax$ definirali pojme stabilni, centralni in nestabilni podporostor, E^s, E^c in E^n po vrsti.

Naj bo v sistemu

$$\dot{x} = Ax$$

$n \times n$ matrika A realna in naj ima k realnih lastnih vrednosti, štetih z večkratnostjo. Naj bo w_j posplošeni lastni vektor realne matrike A za lastno vrednost $\lambda_j = a_j + ib_j$. Pišimo

$$u_j = \operatorname{Re} w_j, \quad v_j = \operatorname{Im} w_j.$$

Potem je $u_j - iv_j$ lastni vektor za $\lambda_j = a_j - ib_j$. Pripomnimo, da je v primeru, ko je $b_j = 0$, tudi vektor $v_j = 0$. Množica

$$B' = \{u_1, v_1, \ldots, u_m, v_m\}, \quad m = (n+k)/2$$

je ogrodje $\mathbb{R}^n$. Od baze se loči le po tem, da v zaporedju nastopa nekaj ničel. Množica

$$B = \{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, u_m, v_m\}, \quad m = (n+k)/2$$

pa je baza. Lastni podprostor, ki ga generirajo posplošeni lastni vektorji, imenujemo posplošeni lastni podprostor.

Definicija 1.4. *Naj bo $\lambda_j = a_j + ib_j$, $w_j = u_j - iv_j$ in množica B kot zgoraj. Potem je*

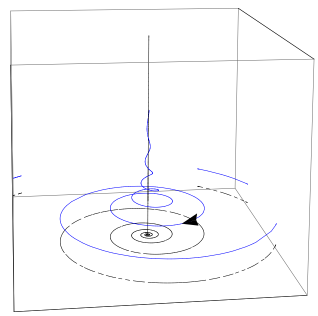
$$\begin{aligned} E^s &= \operatorname{Lin}\{u_j, v_j, a_j < 0\}, \\ E^c &= \operatorname{Lin}\{u_j, v_j, a_j = 0\}, \\ E^n &= \operatorname{Lin}\{u_j, v_j, a_j > 0\}. \end{aligned}$$

Velja $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^c \oplus E^n$. Vsi trije so invariantni za $Exp(At)$.

Primeri.
1. Matrika

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ima kompleksni lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$ z lastnima vektorjema $w_{1,2} = (0,1,0) \pm i(1,0,0)$. Potem je $u_1 = (0,1,0)$ in $v_1 = (1,0,0)$. Lastni vrednosti 3 pripada lastni vektor $(0,0,1)$. Stabilni podprostor $E^s = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ je enak ravnini (x,y), center je trivialen, nestabilni podprostor pa je enak z-osi $\{(0,0)\} \times$



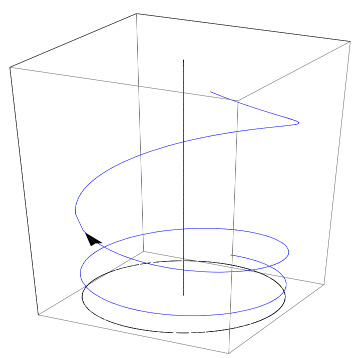
Slika 1.1: Fazni potrtet: $E^s = \mathbb{R}^2 \times 0$, $E^n = (0,0) \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$. Fazni potrtet prikazuje slika 1.1.

2. Matrika

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ima kompleksni lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = i$ z lastnima vektorjema $w_{1,2} = (0,1,0) \pm i(1,0,0)$. Potem je $u_1 = (0,1,0)$ in $v_1 = (1,0,0)$. Lastni vrednosti 2 pripada lastni vektor $(0,0,1)$. Centralni podprostor $E^s = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ je enak ravnini (x,y), stabilni podprostor je trivialen, nestabilni podprostor pa je enak z-osi $\{(0,0)\} \times \mathbb{R}$. Fazni potrtet prikazuje slika 1.2.

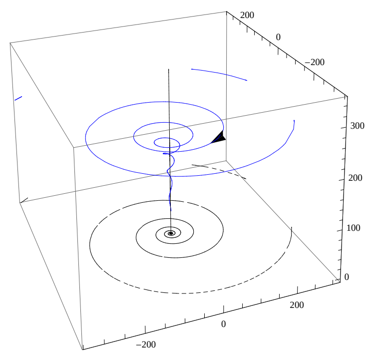


Slika 1.2: Fazni potrtet: $E^c = \mathbb{R}^2 \times 0$, $E^n = (0,0) \times \mathbb{R}$

3. Matrika

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

ima kompleksni lastni vrednosti $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$ z lastnima vektorjema $w_{1,2} = (0,1,0) \pm i(1,0,0)$. Potem je $u_1 = (0,1,0)$ in $v_1 = (1,0,0)$. Lastni vrednosti -3 pripada lastni vektor $(0,0,1)$. Stabilni podprostor $E^s = \mathbb{R}^3$ je cel prostor, ostala dva pa sta trivialna. Fazni potrtet prikazuje slika 1.3.



Slika 1.3: Fazni potrtet: $E^s = \mathbb{R}^3$

2. Tokovi in Liouvillov izrek

Definicija 1.5. *Preslikavi* $\varphi_t := e^{At} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *pravimo tok linearnega sistema ali tok vektorskega polja* $f(x) = Ax$.

Za vsak fiksen t je preslikava $\varphi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izomorfizem prostora nase. Preslikava φ_t ima naslednje lastnosti:

$$\varphi_0 = I, \;\; \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}, \; t,s \in \mathbb{R} \;\text{ in }\; \varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = I. \quad (1.6)$$

Družina preslikav φ_t je Abelova grupa za komponiranje. Vsaki družini φ_t difeomorfizmov, ki je Abelova za komponiranje, pravimo enoparametrična grupa difeomorfizmov. Po definiciji toka je

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x)|_{t=t_0} = A\varphi_{t_0}(x).$$

Naj bo D poljubno območje (biti mora tako, da integral obstaja). Potem je

$$V(t) = \int_{\varphi_t(D)} dV = \int_D J(\varphi_t) dV.$$

Izračunajmo odvod po času:

$$\frac{d}{dt}V(t) = \frac{d}{dt}\int_D J(\varphi_t) dV = \int_D \frac{d}{dt}J(\varphi_t) dV.$$

Pri tem smo upoštevali gladkost podatkov in rešitev. Izračunajmo $J(e^{At})$. Po definiciji je to preslikava

$$x \mapsto e^{At}x, \text{ zato je } D_x(e^{At}) = e^{At}I \text{ in } J(e^{At}) = \det e^{At}.$$

Po Liuovillovem izreku je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J(\varphi_t) &= \frac{d}{dt}J(e^{At}) \\ &= \frac{d}{dt}\det e^{At} \\ &= \dot{w}(t) = (\operatorname{sled} A)w(t) \\ &= (\operatorname{sled} A)J(e^{At}). \end{aligned}$$

Vstavimo v gornjo formulo in dobimo

$$\frac{d}{dt}V(t) = \int_D (\operatorname{sled} A)J(\varphi_t) dV = \int_{\varphi_t(D)} \operatorname{sled} A dV.$$

Ker je sistem linearen, ni $\operatorname{sled} A$ nič drugega, kot $\operatorname{div}(Ax)$. Dokazali smo Liouvillov izrek za linearne tokove:

$$\frac{d}{dt}V(t) = \int_{\varphi_t(D)} \operatorname{div}(Ax) dV.$$

Divergenca torej pove, kako se s tokom spreminja volumen območja. Če je divergenca enaka 0, se volumen ohranja.

Definicija 1.6. *Sistem n diferencialnih enačb prvega reda je sistem*

$$\dot{x} = f(x,t), \tag{1.7}$$

kjer je f najmanj zvezna vektorska funkcija. Če t v sistemu eksplicitno ne nastopa, mu pravimo avtonomen. Z dodatnim parametrom $\dot{t} = s$ postane vsak neavtonomen sistem avtonomen (istega razreda gladkosti).

Če je f razreda $\mathcal{C}^1$, je množica lokalnih rešitev $\varphi_t(x)$ tudi (lokalna) enoparametrična grupa za komponiranje z lastnostmi 1.6, le da ni definirana za enake čase v vseh točkah (od tod lokalna).

Definicija 1.7. *Naj bo $E \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica in $f \in C^1(E)$. Naj bo $\varphi(t, x_0)$ rešitev začetnega problema*

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \tag{1.8}$$

z maksimalnim intervalom eksistence $I(x_0)$. Družino preslikav φ_t definirano z

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0)$$

imenujemo tok diferencialne enačbe $\dot{x} = f(x)$ oziroma tok vektorskega polja $f(x)$. Krivuljo $\varphi(I(x_0), x_0)$ imenujemo tokovnica polja, ki je parametrizirana s $\varphi(\cdot, x_0) : I \to E$.

Naj bo

$$\Omega = \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, t \in I(x_0)\}.$$

Če je $(t, x_0) \in \Omega, t > 0$, potem je tudi $[0, t] \times x_0 \subset \Omega$. Isto za $t < 0$.

Trditev 1.8. *Naj bo E odprta. Potem je množica Ω odprta in preslikava φ_t je razreda C^1.*

Dokaz. Odprtost sledi iz lokalnega eksistenčnega izreka. Trdimo, da Ω ne vsebuje robne točke. Če je namreč točka (t_0, x_0) na robu Ω, mora obstajati rešitev začetnega problema skozi $\varphi_{t_0}(x_0)$, definirana na okolici te točke in ker je rešitev gladka v obeh argumentih, je definirana še za vse (t, x) blizu (t_0, x_0). Gladkost smo že dokazali. $\diamondsuit$

Pokažimo, da velja Liuovillov izrek tudi v tem primeru. Naj bo kot prej D poljubno območje, kjer lahko integral definiramo in

$$V(t) = \int_{\varphi_t(D)} dV = \int_D J(\varphi_t)(x) dV.$$

Izračunajmo odvod po času:

$$\frac{d}{dt} V(t) = \frac{d}{dt} \int_D J(\varphi_t)(x) dV = \int_D \frac{d}{dt} J(\varphi_t)(x) dV.$$

Izračunajmo pdvod determinante po pravilu za odvajanje multilinearnih preslikav

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J(\varphi_t)(x) &= \frac{d}{dt}\begin{vmatrix}\operatorname{grad}\varphi_t^1(x)\\ \vdots\\ \operatorname{grad}\varphi_t^n(x).\end{vmatrix} = \\ &= \sum_i \begin{vmatrix}\operatorname{grad}\varphi_t^1(x)\\ \vdots\\ \frac{d}{dt}\operatorname{grad}\varphi_t^i(x)\\ \vdots\\ \operatorname{grad}\varphi_t^n(x)\end{vmatrix} =\end{aligned}$$

Zamenjamo vrstni red odvajanja od opazimo, da je

$$\frac{d}{dt}\operatorname{grad}\varphi_t^i(x) = \operatorname{grad}\frac{d}{dt}\varphi_t^i(x) = \operatorname{grad} f_i(\varphi_t(x)) = \operatorname{grad}(f_i)D_x\varphi_t(x).$$

Če to vstavimo v matriko, opazimo, da lahko z Gaussovo eliminacijo odstranimo iz i-te vrstice vse člene $\frac{d}{dx_j}\varphi_t^k$, $k \neq i$:

$$\begin{vmatrix}(\varphi_t^1(x))_{x_1} & (\varphi_t^1(x))_{x_2} & \dots & (\varphi_t^1(x))_{x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \sum f_{ix_j}(\varphi_t^j(x))_{x_1} & \sum f_{ix_j}(\varphi_t^j(x))_{x_2} & \dots & \sum f_{ix_j}(\varphi_t^j(x))_{x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (\varphi_t^n(x))_{x_1} & (\varphi_t^n(x))_{x_2} & \dots & (\varphi_t^n(x))_{x_n}\end{vmatrix}.$$

Zato v i-ti vrstici ostanejo samo členi matrike

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(f_i)\begin{bmatrix}\dots 0 \dots\\ \operatorname{grad}\varphi_t^i(x)\\ \dots 0 \dots\end{bmatrix} &= \left[\frac{df_i}{dx_i}(\varphi_t(x))\frac{d}{dx_1}\varphi_t^i(x), \dots, \frac{df_i}{dx_i}(\varphi_t(x))\frac{d}{dx_n}\varphi_t^i(x)\right] = \\ &= \frac{df_i}{dx_i}(\varphi_t(x))\operatorname{grad}_x\varphi_t^i(x).\end{aligned}$$

Potem je

$$\frac{d}{dt}J(\varphi_t)(x) = \sum_i \frac{df_i}{dx_i}J(\varphi_t)(x) = (\operatorname{div} f)(\varphi_t(x))J(\varphi_t)(x).$$

Po izreku o substituciji dobimo

$$\frac{d}{dt}V(t) = \int_{\varphi_t(D)} (\operatorname{div} f)(x)dV.$$

2. Eksistenčni izreki

1. Ponovitev znanih izrekov, Picardova metoda

Radi bi rešili navadno diferencialno enačbo $y' = f(x, y)$ pri začetnem pogoju $y(x_0) = y_0$. Rešitev iščemo na intervalu $[a, b]$, kjer je $a = x_0$. Izberemo (recimo ekvidistantno) delitev intervala $x_0, x_1, \dots x_n$ in rešitev na intervalu $[x_0, x_1]$ poiščemo z Eulerjevo metodo:

$$y_1(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

To je premica, ki je tangentna na graf rešitve v začetnem pogoju. Potem vzamemo za začetno točko $(x_1, y_1(x_1))$ in postopek ponovimo. Dobimo lomljeno krivuljo. Drobnejša, kot je bila delitev, bolje bo naša rešitev aproksimirala pravo.

Pri reševanju diferencialnih enačb nas bodo zanimala eksistenca rešitev, enoličnost in zvezna (oz. gladka) odvisnost od začetnih podatkov. Problem, ki izpolnjuje te zahteve, imenujemo koreken. Znani izreki so

Izrek 2.2. *(Lokalni eksistenčni izrek). Naj bo $y' = f(x, y)$ diferencialna enačba in $f \in \mathcal{C}((0, a) \times (0, b))$, f Lipschitzova na y s koeficientom $k(x)$, ki je lokalno integrabilen na $(0, a)$. Potem obstaja natanko ena rešitev enačbe pri začetnem pogoju $(x_0, y_0) \in (0, a) \times (0, b)$, ki je definirana na okolici začetne x_0.*

Opomba. Predpostavke izreka so izpolnjene, če je npr. Lipschitzova konstanta $k(x) = k$ neodvisna od x.

Dokaz. Picardova metoda. Spomnimo se na Eulerjevo metodo iskanja rešitev. Če začnemo z začetnim približkom y_0, dobimo točko $y_1 = y_0 + (x - x_0) f(x_0, y_0)$. Prvi del rešitve predstavlja daljica med tema dvema točkama. Poglejmo na ta postopek s stališča funkcij. Začnemo s konstantno funkcijo y_0 in dobimo premico skozi $(0, y_0)$ in (x, y_1). Ta premica pa ima enačbo $y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt$. Potem v isto enačbo vstavimo našo premico in dobimo novo funkcijo itd. Formalizirajmo zdaj ta postopek.

Začnimo s konstanto $\varphi_0(x) = y_0$. Če to funkcijo vstavimo v diferencialno enačbo in integriramo, dobimo

$$A(\varphi_0)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_0(t))\,dt.$$

Dobljena funkcija zadošča začetnemu pogoju, njen odvod po x v x_0 pa je enak $f(x_0, \varphi_0(x_0))$, torej ima v točki x_0 pravi tudi odvod. Naj bo $\varphi_1 := A(\varphi_0)$ in izračunajmo $\varphi_2 = A(\varphi_1)$. Kot prej funkcija ustreza začetnemu pogoju in $\varphi_2'(x) = f(x, \varphi_1(x))$ (odvod v x_0 je tudi pravi). Če bi bila funkcija φ_2 blizu φ_1, bi dobili približno pravo rešitev. Postopek ponavljamo in dobimo zaporedje funkcij, ki ustreza

$$\varphi_{n+1}'(x) = f(x, \varphi_n(x)),\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.1}$$

Denimo, da zaporedje funkcij $\varphi_i = A^i(\varphi_0)$ konvergira k funkciji φ. Ko v enačbah (2.1) pošljemo $n \to \infty$, dobimo enačbo

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \tag{2.2}$$

torej φ reši diferencialno enačbo pri danem začetnem pogoju. Edini problem je konvergenca. Dokazati moramo, da je zaporedje $y_i = A^i(\varphi_0)$ Cauchyjevo, kar pomeni, da morajo biti norme razlik $A^n(\varphi_0) - A^m(\varphi_0)$ majhne in paziti, da ne pademo iz definicijskega območja funkcije f. Ocenimo najprej normo razlike za poljubni funkciji ψ in φ :

$$A(\psi)(x) - A(\varphi)(x) = \int_{x_0}^{x} (f(t, \psi(t)) - f(t, \varphi(t)))\,dt.$$

Če je f (pri fiksnem x) Lipschitzova na y, velja

$$|f(t, \psi(t)) - f(t, \varphi(t))| \leq k(t)|\psi(t) - \varphi(t)|,$$

zato bo

$$\begin{aligned} \|A(\psi) - A(\varphi)\|_\infty &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, \psi(t)) - f(t, \varphi(t))|\,dt \leq \\ &\leq \int_{x_0}^{x} k(t)\,dt \|\psi - \varphi\|_\infty; \end{aligned}$$

norma $\|\|_\infty$ se nanaša na interval $[x_0, x]$. Pokayali smo, da je A na intervalu $[0, x]$ Lipschitzova s koeficientom

$$K(x) = \int_{x_0}^{x} k(t)\, dt.$$

Denimo, da zaporedje y_i konvergira k y. Potem za $K(x) < 1$ velja apriorna ocena

$$\|y - y_0\| \leq K(x)\|y_1 - y_0\| + K^2(x)\|y_1 - y_0\| + \ldots \leq \frac{K(x)}{1 - K(x)}\|y_1 - y_0\|,$$

pri čemer gre zaradi zveznosti f norma $\|y_1 - y_0\|$ proti 0, ko gre $x \to 0$, prav tako pa ulomek pred njo. To pomeni, da bo vsaka rešitev v danem definicijskem območju, če bo x dovolj blizu 0. normo razlike

$$\begin{aligned}\|A^n(\psi) - A^m(\psi)\|_\infty &\leq K(x)^m\|A^{n-m}(\psi) - \psi\|_\infty \leq \\ &\leq K(x)^{m-1}(K(x)^{n-m-1} + K(x)^{n-1} + \ldots + 1) \cdot \\ &\quad \cdot\|A(\psi) - \psi\|_\infty.\end{aligned}$$

Vidimo, da bo zaporedje $A^n(\psi)$ Cauchyjevo, če bo ta konstanta vedno manjša od 1. Poglejmo, kdaj bo. Ker gre za vsoto geometrijske vrste, zadošča vsak K, ki je manjši od 1 saj je potem vsota

$$1 + K + K^2 + +K^3 + \ldots + K^l \leq \frac{1}{1 - K},$$

faktor K^{m-1} pa tako majhen, kot želimo. Zato lahko za vsak $\varepsilon > 0$ izberemo N da je za $m, n > N$ norma $\|A^n(\psi) - A^m(\psi)\|_\infty \leq \varepsilon$. Če je k integrabilna na $[x_0, x_1]$ za nek $x_1 > x_0$, potem lahko izberemo x dovolj blizu x_0 in dosežemo, da je $\int_{x_0}^{x} k < 1$.

Dokazali smo, da bo zaporedje φ_i konvergentno in bo imelo limito φ. Dokazali smo pravzaprav več. Zaporedje $A^n(\psi)$ bo konvergiralo k rešitvi tudi za (nekatere) druge funkcije ψ, saj je $A^n(\psi)(x_0) = y_0$ in $A^n(x_0)' = f(x_0, A^{n-1}\psi(x_0)) = f(x_0, y_0)$ za $n \geq 2$.

Dokažimo še enoličnost. Naj bosta φ in ψ različni rešitvi diferencialne enačbe, ki ustrezata istemu začetnemu pogoju (x_0, y_0) in interval okoli x_0 tako majhen, da bo $K(x) < 1$. Ker je $A(\varphi) = \varphi$ in $A(\psi) = \psi$, lahko ocenimo

$$\|\psi - \varphi\|_\infty = \|A(\psi) - A(\varphi)\|_\infty \leq K(x)\|\psi - \varphi\|_\infty,$$

kar je mogoče le, če je norma razlike enaka 0, torej sta funkciji enaki. $\diamondsuit$

Na čisto enak način, kot pri navadnih diferencialnih enačbah (izrek 2.2.), lahko s Picardovo metodo dokažemo eksistenco in enoličnost pri sistemih. Integriramo po komponentah.

Izrek 2.3. *(Lokalni eksistenčni izrek). Naj bo $y' = f(x,y)$ sistem diferencialnih enačb in $f \in \mathcal{C}((0,a)\times(0,b)^n)$, f Lipschitzova na y s koeficientom $k(x)$, ki je lokalno integrabilen na $(0,a)$. Potem obstaja natanko ena rešitev enačbe pri začetnem pogoju $(x_0,y_0) \in (0,a)\times(0,b)^n$, ki je definirana na okolici x_0.*

Opomba. Naj bodo izpolnjene predpostavke lokalnega eksistenčnega izreka. Naj bosta y_i, $i = 1,2$, rešitvi istega začetnega problema, definirani na odprtih intervalih I_i $i = 1,2$ po vrsti. Potem se ujemata na $I_1 \cap I_2$.

1.1 Globalni eksistenčni izrek, enoličnost.

Velja tudi globalna verzija eksistenčnega izreka:

Izrek 2.4. *(Globalni eksistenčni izrek 1) Naj bo $x' = f(t,x)$ sistem diferencialnih enačb in $f \in \mathcal{C}([0,a]\times\mathbb{R}^n)$, f Lipschitzova na x pri fiksnem t s koeficientom $k(t)$, ki je integrabilen na $[0,a]$. Potem obstaja natanko ena rešitev enačbe pri začetnem pogoju $(t_0,x_0) \in [0,a]\times\mathbb{R}^n$.*

Dokaz. Pokažimo, da je integralski operator A iz lokalnega eksistenčnega izreka skrčitev za metriko $d(y,z) = \max_{[0,a]} |y(t) - z(t)|e^{-K(t)}$, kjer je $K(t) = \int_0^t k(s)\,ds$. Tako definirana metrika je ekvivalentna običajni sup metriki (domača naloga), zato je prostor $\mathcal{C}([0,a],\mathbb{R}^n)$ poln. Zapišimo še oceno

$$
\begin{aligned}
d(Ay,Az) &\le \max_{[0,a]} \int_0^t |f(s,y(s)) - f(s,z(s))|e^{-2K(t)}\,ds \le \\
&\le \max_{[0,a]} \int_0^t |y(s)-z(s)|k(s)e^{-2K(s)}e^{2K(s)}e^{-2K(t)}\,ds \le \\
&\le \max_{[0,a]} e^{-2K(t)}(\max_{[0,t]} |y(s)-z(s)|e^{-2K(s)} \int_0^t k(s)e^{-2K(s)}\,ds \\
&\le \max_{[0,a]}(\max_{[0,t]} |y(s)-z(s)|e^{-2K(s)}) \cdot \frac{1}{2} \\
&\le \frac{1}{2}\max_{[0,a]} |y(s)-z(s)|e^{-2K(s)}.
\end{aligned}
$$

Uporabili smo dejstvo, da je

$$e^{-2K(t)}\int_0^t k(s)e^{-2K(s)}\,ds = e^{-2K(t)}\frac{1}{2}(e^{2K(t)}-1) \le \frac{1}{2}.$$

2. Eksistenca

Izrek 2.5. *(Globalni eksistenčni izrek 2, Peanov eksistenčni izrek) Naj bo $x\ ' = f(x)$ avtonomen (t na desni ne nastopa) sistem diferencialnih enačb in $f \in \mathcal{C}(\overline{G})$, kjer je G odprta in omejena množica v $\mathbb{R}^n$. Rešitev enačbe pri začetnem pogoju $(0, x_0) \in [0, a]\times\mathbb{R}^n$ obstaja. Naj bo $D = d(x_0, \partial G)$ razdalja do roba in M zgornja meja za absolutne vrednosti f. Potem je rešitev definirana za čase*

$$t_0 - \frac{D}{M\sqrt{n}} \le t \le t_0 + \frac{D}{M\sqrt{n}}.$$

Dokaz. Dokaz je mešanica Picardove in Eulerjeve metode. Bistvena razlika je v tem, da delitev časovnega intervala določamo sproti glede na velikost f.

<u>Konstrukcija ε-aproksimativne rešitve.</u> Naj bo x_0 dana začetna točka z razdaljo do roba $D > 0$. Izberimo $\varepsilon > 0$. Zaradi enakomerne zveznosti obstaja $\delta > 0$, da je $\|f(x)-f(x')\|_\infty < \varepsilon$ za $\|x-x'\|_\infty < \delta$. Razrežimo definicijsko območje G na δ-mrežo, tako da je G pokrito z δ-kockami. Po Eulerjevi metodi naredimo prvi približek

$$x(t) = x_0 + f(y_0)(t - t_0).$$

Naj bo t_1 najmanjši $t > 0$ pri katerem zadene ta premica rob kocke, v kateri je x_0. Označimo presek premice in kocke z x_1 in ponovimo postopek z začetnim časom t_1 in začetno točko x_1. Postopek lahko ponavljamo toliko časa, dokler ne zadenemo roba. Dolžina poligonalne črte, če gremo naravnosti proti najbližiji robni točki z maksimalno hitrostjo je

$$\|x(t) - x_0\| \le (t - t_0)\|f\|_2 \le (t - t_0)M\sqrt{n}$$

in želimo, da je omejena z D. Od tod dobimo

$$t - t_0 < \frac{D}{M\sqrt{n}}.$$

Enako za pomikanje v negativno smer. Ta krivulja se imenuje Eulerjev poligon. Pokažimo, da velja ocena

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(x(s))\,ds + \int_{t_0}^t \theta(s)\,ds,$$

kjer so komponente θ po absolutni vrednosti pod ε. Gornja integralska enačba je ekvivalentna sistemu

$$x(t)' = f(x(t)) + \theta(t),$$

kjer se dogovorimo, da oznaka $'$ pomeni npr. desni odvod. Naj bo $t \in [t_i, t_{i+1}]$ poljuben čas. Potem velja

$$x(t) = x_i + f(x_i)(t - t_i) = x_i + \int_{t_i}^{t} f(x_i)\, ds \text{ in}$$

$$x(t)_i = x_i + \int_{t_i}^{t} f(x(s))\, ds + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x_i) - f(x(s))\, ds.$$

Zaradi enakomerne zveznosti je

$$\|f(x(t)) - f(x_i)\|_\infty < \varepsilon,$$

zato je na intervalu $[t_i, t_{i+1}]$

$$x(t) = x_i + \int_{t_i}^{t} f(x(s))\, dt + \int_{t_i}^{t} \theta(s)\, dt$$

kjer je $\theta(t) = f(x_i) - f(x(t))$ s $\|\theta\| < \varepsilon$. Tako definiramo funkcijo θ na vsakem intervalu. Upoštevajmo, da je

$$x_i = x_0 + \sum_{0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x_k)\, dt$$

in zapišimo

$$x(t) = x_0 + \sum_{0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x_k)\, dt + \int_{t_i}^{t} f(x_i)\, dt.$$

Potem je

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(t)) + \sum_{0}^{i-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f(x_k) - f(x(t))\, dt + \int_{t_i}^{t} f(x_i) - f(x(t))\, dt.$$

Funkcija θ je lomljena.

Naj bo $\varepsilon_n < 1$ padajoče zaporedje z limito 0 in naj bodo x_n pripadajoči Eulerjevi poligoni. Vsi so definirani na istem časovnem intervalu. Super bi bilo, če bi zaporedje Eulerjevih poligonov konvergiralo, ampak to v splošnem ni res. Ima pa to zaporedje dve lepi lastnosti in sicer, da so vsi poligoni omejeni z isto konstanto (ker smo na kompaktu $\overline{G}$) in da so enakozvezni, kar pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$ tako da je

$$\|x_n(t) - x_n(t')\|_\infty < \varepsilon, \text{ za vsak } n \text{ in } |t - t'| < \delta.$$

Po Arzela - Ascolijevem izreku ima tako zaporedje konvergentno podzaporedje. Ker gredo funkcije $\theta_n \to 0$ in je f enakomerno zvezna, limita tega podzaporedja zadošča integralski enačbi

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(t))\, dt.$$

Preverimo še enakozveznost:

$$x_n(t+h) - x_n(t) = \int_t^{t+h} f(x_{n,k})\, dt + \int_t^{t+h} \theta_n\, dt.$$

Ocenimo v normi $\|\|_\infty$ in dobimo

$$\|x_n(t+h) - x_n(t)\|_\infty \leq h(M + \varepsilon_n) \leq h(M+1).$$

$\diamondsuit$

Navidez majhna slabost tega izreka je zahteva, da je sistem avtonomen. Recimo, da je naš sistem oblike

$$x' = f(t, x).$$

Z dodatkom enačbe $t' = 1$ sistem postane avtonomen in je definiran na $\mathbb{R} \times \overline{G}$. Naj bo f zvezna na $[t_0 - b, t_0 + b] \times \overline{G}$, kjer je $G \subset \mathbb{R}^n$ omejena oprta množica. Dolžina med začetno in končno točko je kvečjemu enaka razdalji do roba, ki je $\min(D, b)$, po drugi strani pa je razdalja med omenjenima točkama navzgor omejena z

$$\int_{t_0}^{t_0+s} \sqrt{t'^2 + \|f\|^2} < (1 + M\sqrt{n})s \leq \min(D, b).$$

ker je $t = t_0 + s$ za $s \in [0, s_0]$ za nek $s_0 \leq b$, je rešitev prvotnega sistema definirana za $t \in (t_0 - h, t_0 + h)$, kjer je

$$h = \frac{\min(D, b)}{1 + M\sqrt{n}}.$$

Posledica 2.6. *Naj bodo izpolnjene predpostavke eksistenčnega izreka 2.5. Če z naraščajočim časom rešitev diferencialne enačbe ostaja v kompaktni množici* $\Gamma \subset G$, *potem lahko rešitev definiramo za vse čase* $[t_0, \infty)$.

Dokaz. Naj bo $2D$ razdalja Γ do roba G. Če je rešitev v času t_1 v Γ, jo po eksistenčnem izreku lahko nadaljujemo še za časovni interval dolžine $D/(M\sqrt{n})$ (oz. $\min(D, b)/(1+M\sqrt{n})$, če vzamemo neavtonomen sistem.) $\diamondsuit$

Izrek 2.7. *(Globalni eksistenčni izrek 3) Naj bo* f *zvezna na* $\mathbb{R}^n$ *in tipa* $\mathcal{O}(\|x\|)$, *ko gre* $\|x\| \to \infty$. *Potem je rešitev sistema* $x' = f(x)$ *definirana za vse čase pri vsakem začetnem pogoju.*

Dokaz. Iz predpostavk sledi, da je $\|f\|_\infty < A\|(x, 1)\|_\infty$ za vlike x. Naj bo x_0 začetna točka in naj bo $\|x - x_0\|_\infty < b$ in naj bo M zgornja meja za $\|f\|_\infty$ za tej kocki. Po eksistenčnem izreku je rešitev definirana na intervalu $[t_0, t_0 + b/(M\sqrt{n})]$.

Zdaj pa vzemimo začetno trojko $(x_0, t_0, b) = (x_0, 0, 1)$. Naj bo $c = \|x_0\|_\infty$. Brez škode za splošnost (zakaj? - v principu bi morali začeti na veliki krogli z neko konstanto, izven pa imamo linearno oceno) lahko za M vzamemo $M = A(c + 1)$. Potem je čas

$$t_1 = \frac{1}{A(c+1)\sqrt{n}} \text{ in } \|x(t)\|_\infty \leq c + 1.$$

Zdaj vzamemo trojko $(x_0, t_0, b) = (x(t_1), t_1, 1)$. Z enakimi ocenami kot zgoraj dobimo $M = A(c + 2)$ in

$$t_2 = \frac{1}{A(c+2)\sqrt{n}}.$$

Postopek ponavljamo. Vsota $\sum t_i$ je divergentna, zato je rešitev definirana za vse čase. $\diamondsuit$

Posledica 2.8. *Če je* $f(x, t)$ *enakomerno* $\mathcal{O}(\|x\|)$, *ko gre* $\|x\| \to \infty$, *je rešitev sistema* $x' = f(x, t)$ *definirana za vse čase.*

Dokaz. Pri teh predpostavkah pripadajoč avtonomni sistem izpolnjuje predpostavke izreka 2.7. $\diamondsuit$

3. Reparametrizacija

Izrek 2.9. *(Reparametrizacina ja $\mathbb{R}^n$) Naj bo $x\,' = f(x)$ avtonomen sistem linearnih diferencialnih enačb in $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Potem ima sistem*

$$x\,' = \frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|}$$

eno samo rešitev enačbe pri začetnem pogoju (t_0, x_0), ki je definirana za vse čase.

Opomba. Če je f Lipschitzova, je tudi nova funkcija Lipschitzova in izrek velja.

Dokaz. Dokazati je potrebno le, da je omejena funkcija

$$\frac{f(x)}{1 + \|f(x)\|}$$

Lipschitzova in uporabiti eksistenčni izrek 2.7. ♢

Izrek 2.10. *(Reparametrizacija na E) Naj bo $x\,' = f(x)$ avtonomen sistem linearnih diferencialnih enačb in f Lipschitzova na E. Potem obstaja sistemu*

$$x\,' = f$$

ekvivalenten sistem (tj. tak, ki ima enake tokovnice), ki je definiran na $\mathbb{R}^n$ in ima rešitve definirane za čase iz $\mathbb{R}$. Rešitve so zvezne funkcije začetnih pogojev.

Dokaz. Kot v prejšnjem izreku smemo privzeti, da je f omejena z 1. Naj bo $d(x, E^c)$ razdalja do roba E. Ta funkcija je zvezna na $\mathbb{R}^n$ in Lipschitzova s konstanto 1. Naj bo

$$\psi(x) = \frac{d(x, E^c)}{1 + d(x, E^c)}.$$

Tudi ta je Lipschitzova s konstanto 1. Definirajmo

$$x\,' = f(x)\psi(x).$$

Produkt dveh omejenih Lipschitzovih funkcij je spet Lipschitzova in omejena funkcija, zato imamo enoličnost in zvezno odvisnost od podatkov. Ta sistem je definiran na $\mathbb{R}^n$ in tokovnice na E so enake tokovnicam prvotnega sistema, ker pa je desna stran na komplementu enaka 0, so tokovnice izven E konstante. Recimo, da obstaja rešitev originalnega sistema, ki se je ne da nadaljevati preko časa t_1. Dolžina take tokovnice ne more biti neskončna, ker je norma f navzgor omejena z 1 in je zato

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{x}\| \leq \int_{t_0}^{t_1} 1 = t_1 - t_0.$$

Potem mora obstajati stekališče, saj ima tokovnica končno dolžino, in ker ima končno dolžino, je stekališče lahko samo eno (sicer imamo oscilacije med dvema različnima točkama, ki sta stekališči in to prinese neskončno dolžino). Stekališče je na robu E. Če bi bilo v notranjosti, bi imela celotna rešitev na $[t_0, t_1]$ končno oddaljenost do roba. Natančneje, okoli x_1 bi vzeli majhno kroglo in D bi bil razdalja te krogle do roba. Potem vemo, da lahko pri vsakem začetnem pogoju iz te krogle napredujemo za fiksno časovno enoto, npr. δ. Vzamemo $t = t_1 - \delta_2$, in točko $x(t)$. Rešitev lahko potem podaljš1amo čez x_1.

Naj bo dolžina enaka s_0. Parametrizirajmo jo z naravnim parametrom s. Definirajmo

$$t(s) = \int_0^s \frac{dl}{\|f(x(t(l)))\|\psi(x(t(l)))}.$$

Ker je $\psi(x) < d(x, E^c) < d(x(t(l)), x(t(s_0))) \leq s_0 - l$, lahko ocenimo t z

$$t \geq \frac{1}{c} \int_0^s \frac{dl}{s_0 - l},$$

kjer je c zgornja meja za normo f vzdolž tokovnice. Integral divergira, ko gre $s \to s_0$. $\diamondsuit$

Opomba. Namesto funkcije ψ lahko vzamemo karšnokoli drugo funkcijo, ki gre vsaj linearno (glede na robno razdaljo) proti 0. Poleg tega opazimo, da je uvedba nove spremenljivke difeomorfizem izven kritičnih točk. Dinamični sistem je torej gladek, grupe pa so homeomorfizmi na $\mathbb{R}^n$, ki so gladki na komplementu stacionarnih točk.

4. Zvezna odvisnost od podatkov

Lema 2.11. *(Gronwall) Naj bo g zvezna nenegativna realna funkcija, ki zadošča*

$$g(t) \leq C + K \int_0^t g(s)ds$$

na intervalu $[0, a]$. *Potem je* $g(t) \leq Ce^{Kt}$.

Dokaz. Naj bo

$$G(t) = C + K \int_0^t g(s)ds.$$

Odvajamo in dobimo

$$G' = Kg,$$

torej je

$$\frac{G'}{G} = \frac{Kg}{G} \leq \frac{KG}{G} \leq K,$$

zato je

$$\ln(G) \leq \ln Kt + \ln G(0),$$

oz.

$$G(t) \leq G(0)e^{Kt}.$$

Vstavimo $G(0) = C$ in dokaz je končan. ♢

Izrek 2.12. *(Zvezna odvisnost od podatkov) Naj bodo sistem avtonomen, f pa zvezna in Lipschitzova s konstanto K. Potem je rešitev zvezno odvisna od začetnih podatkov.*

Dokaz. Naj bo $x(t, y)$ rešitev pri začetnem pogoju $x(0) = y$. Izračunajmo razliko

$$\begin{aligned}
|x(t, y + h) - x(t, y)| &\leq |h| + \int_0^t |f(s, x(s, y + h)) - f(s, x(s, y))|ds \\
&\leq |h| + K \int_0^t |x(s, y + h) - x(s, y)|ds.
\end{aligned}$$

Iz Gronwallove leme 2.11. sledi, da je rast razlike enaka

$$|x(t, y + h) - x(t, y)| \leq |h|e^{K|t|}, \ \ t \in [-a, a]$$

za nek dovolj majhen a.

Opomba. Gronwallova lema velja le za pozitivne čase. Vendar pa je rešitev za negativne čase enaka rešitvi za pozitivne čase za sistem z obrnjenim časom, zato lahko lemo uporabimo na $[-a, a]$ s tako oceno.

Naj bo f omejena na okolici začetnega pogoja s konstanto M (tj, vzamemo območje $G = U(t_0, y)$. Ocenimo razliko

$$\begin{aligned} |x(t+k, y+h) - x(t, y)| &\leq |x(t+k, y+h) - x(t+k, y)| + \\ &\quad +|x(t+k, y) - x(t, y)| \\ &\leq |h|e^{K|t+k|} + \int_t^{t+k} |f(u(s, y))|\, ds \\ &\leq |h|e^{K|t+k|} + |k|M. \end{aligned}$$

Rešitev je zvezna v obeh parametrih. (Opomba: v resnici smo uporabili lokalno enakomerno zveznost v odvisnosti od y.) $\diamondsuit$

4.1 Gladka odvisnost od podatkov.

Zanimala nas bo odvisnost rešitev Cauchyjeve naloge (začetnega problema)

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{\mu}), \quad \vec{x}(0) = \vec{y} \tag{2.3}$$

v odvisnosti od začetnega pogoja in parametra $\vec{\mu}$. Označimo rešitev z $\vec{u}(t, \vec{y}, \vec{u})$. Grobo rečeno je rešitev je toliko gladka v parametrih, kolikor je gladka funkcija $\vec{f}$.

Izrek 2.13. *(Gladka odvisnost od začetnih pogojev). Naj bo $E \subset \mathbb{R}^n$ odprta in $f \in C^1(E)$. Naj bo $x_0 \in E$ Potem obstajata taka $a > 0$ in $\delta > 0$, da ima za vsak $y \in B(x_0, \delta)$ začetni problem (2.3) eno samo rešitev $u(t, y)$, definirano na $G = [-a, a] \times B(x_0, \delta)$, ki je razreda C^1. Vsaka taka rešitev je pri fiksnem y v $C^2([-a, a])$.*

Dokaz. Če je $u(t, y)$ rešitev enačbe (2.3), je tudi rešitev pripadajoče integralske enačbe

$$u(t, y) = y + \int_0^t f(u(s, y(s))ds.$$

Ker je pri fiksnem y rešitev u vsaj C^1, je po osnovnem izreku analize za gornjo enačbo tudi C^2 v spremenljivki t.

Če naj bi parcialni odvod u na y obstajal, bi moral ustrezati funkcijski enačbi

$$\frac{\partial}{\partial y}u(t,y) = I + \int_0^t Df(u(s,y))\frac{\partial}{\partial y}u(s,y)ds.$$

Parcialni odvod je torej rešitev matričnega sistema enačb

$$\dot{\Phi} = Df(u)\Phi, \;\; \Phi(0,y) = I.$$

Po globalnem eksistenčnem izreku rešitev obstaja na dovolj velikem definicijskem območju, saj je $Df(u)$ zvezna v t in ima zato omejeno normo, ki je naš Lipschitzov koeficient. Naj bo rešitev matrična funkcija $V(t,x_0)$. Izračunajmo razliko

$$\begin{aligned}
\|u(t,y+h)-u(t,y)\| &\leq \|h\| + \int_0^t \|f(u(s,y+h)) - f(u(s,y))\|ds \\
&\leq \|h\| + K\int_0^t \|u(s,y+h)-u(s,y)\|ds.
\end{aligned}$$

Iz Gronwallove leme 2.11. sledi, da je rast razlike enaka

$$\|u(t,y+h)-u(t,y)\| \;\; \leq \;\; \|h\|e^{K|t|}, \;\; t\in[-a,a]. \tag{2.4}$$

Opomba. Gronwallova lema velja le za pozitivne čase. Vendar pa je rešitev za negativne čase enaka rešitvi za pozitivne čase za sistem z obrnjenim časom, zato lahko lemo uporabimo na $[-a,a]$ s tako oceno.

Izračunajmo razliko

$$\begin{aligned}
\|u(t,y+h)-u(t,y)-Vh\| \;\; &\leq \;\; y+h-y-Ih + \int_0^t \|f(u(s,y+h)) - \\
&\qquad -f(u(s,y)) - Df(u(s,y))Vh\|ds \\
\leq \int_0^t &\|Df(u(s,y))(u(s,y+h)-u(s,y)) - Df(u(s,y))Vh\|ds + \\
&\qquad + \int_0^t \|R(u(s,y+h),u(s,y))\|ds, \\
\leq \int_0^t &\|Df(u(s,y))\|\|u(s,y+h)-u(s,y)-Vh\|ds + \\
&\qquad + \int_0^t \|R(u(s,y+h),u(s,y))\|ds,
\end{aligned}$$

kjer je R ostanek pri razvoju f v Taylorjev polinom 1. stopnje. Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da če je $|h| < \delta$ je ostanek ocenjen z

$$\|R(u(s, y+h), u(s, y))\| \leq \varepsilon |u(s, y+h) - u(s, y)|$$

na $[-a, a]$. Naj bo $\|Df(u(s, y))\| < M_1$. Uporabimo oceno Gronwallove leme (2.4) za gornji ostanek in prepišimo oceno v

$$\|u(t, y+h) - u(t, y) - Vh\| \leq M_1 \int_0^t \|u(s, y+h) - u(s, y) - Vh\| ds + \varepsilon a \|h\| e^{Ka}.$$

Naj bo funkcija g definirana s predpisom

$$g(t) = |u(t, y+h) - u(t, y) - Vh|.$$

Potem velja

$$g(t) \leq M_1 \int_0^t g(s) ds + a\varepsilon |h| e^{Ka}.$$

Uporabimo Gronwallovo lemo za g in dobimo oceno za $g(t)$

$$g(t) \leq \varepsilon |h| a e^{Ka} e^{M_1 a}, \;\; t \in [-a, a].$$

Delimo z normo $|h|$ in dobimo, da je za vsak $|h| < \delta$ kvocient

$$\frac{|u(t, y+h) - u(t, y) - Vh|}{|h|} \leq \varepsilon a e^{Ka} e^{M_1 a}.$$

Torej je ulomek zvezen v h in ima pri $h = 0$ limito 0. Zato je parcialni odvod u na y enak v. Ker je V zvezna, je u zvezno odvedljiva. $\diamondsuit$
Na podoben način dokažemo

Izrek 2.14. *(Gladka odvisnost od parametrov). Naj bo $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ odprta in $f \in C^1(E)$. Naj bo $(x_0, \mu_0) \in E$. Potem obstajata taka $a > 0$ in $\delta > 0$, da ima za vsak $y \in B(x_0, \delta)$ in $\mu \in B(\mu_0, \delta)$ začetni problem*

$$\dot{x} = f(x, \mu), \;\; x(0) = y \tag{2.5}$$

enolično rešitev $u(t, y, \mu)$, definirano na $G = [-a, a] \times B(x_0, \delta)$, ki razreda C^1. Če je $f \in \mathcal{C}^k(E)$, je $u(t, y, \mu)$ razreda $\mathcal{C}^k$ in pri fiksnih parametrih razreda $\mathcal{C}^{k+1}$ v t.

5. Maksimalni interval eksistence

Naj bo dan avtonomen sistem $\dot{x} = f(x)$, kjer je $f \in C^1(E)$ in E odprta. Obstaja maksimalni interval (α, β), na katerem je rešitev tega sistema definirana. Pokazali smo že (v dokazu izreka 2.10.): če je $\beta < \infty$, in če limita

$$x_0 := \lim_{t \to \beta^-} x(t)$$

obstaja, potem je v ∂E. Povedano drugače, če gornja limita obstaja in je v E, potem je $\beta = \infty$ in x_1 je ravnovesna točka. Dokazali smo vse, razen tega, da je limita ravnovesna točka. Naj bo torej

$$x_0 := \lim_{t \to \infty} x(t)$$

Potem je

$$\lim_{t \to \infty} x(t+h) - x(t) = 0.$$

Uporabimo Lagrangev izrek za vsako od komponent $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in vidimo, da je

$$\lim_{t \to \infty} x(t+h)_i - x(t)_i = \lim_{t \to \infty} f_i(x_i(t_i))h_i = 0,$$

kjer so t_i točke med t in $t+h$ in $x_i(t_i)$ vmesna točka. Ker je f zvezna in je $\lim_{t \to \infty} t_i = \infty$, je tudi $f(x_0)_i = 0$.

Primeri.
1. Oglejmo si primer $x' = x^2$ pri začetnem pogoju $x(0) = 1$. Rešitev je $x(t) = (1-t)^{-1}$ z maksimalnim intervalom eksistence $(-\infty, 1)$. Desna limita v 1 je ∞.

2. Pri začetnem problemu $x' = -(2x)^{-1}$, $x(0) = 1$ imamo rešitev $x(t) = \sqrt{1-t}$ z maksimalnim intervalom $(-\infty, 1)$. Definicijsko območje (povezanost) je $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ z robom 0. Limiti sta ∞ v $-\infty$ in 0 v 1.

3. Oglejmo si sistem

$$\dot{x}_1 = -x_2 x_3^{-2},\ \dot{x}_2 = x_1 x_3^{-2},\ \dot{x}_3 = 1,\ x(\pi^{-1}) = (0, -2, \pi^{-1}).$$

Sistem ima rešitev $x(t) = (\sin(1/t), \cos(1/t), t)$ na maksimalnem intervalu $(0, \infty)$. Limita v 0 ne obstaja, v ∞ pa je ∞.

V vseh spodnjih izrekih je samo na drug način povedano to, kar smo napisali v uvodu.

Izrek 2.15. *Naj bo $E \subset \mathbb{R}^n$ odprta in $f \in C^1(E)$. Za vsak $x_0 \in E$ naj bo (α, β) unija vseh odprtih intervalov, na katerih ima začetni problem $\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$ enolično rešitev x. Naj bo $\beta < \infty$. Potem za vsak kompakt $K \subset E$ obstaja tak $t \in (\alpha, \beta)$, da je $x(t) \notin K$.*

Dokaz. (Že vse dokazali v izreku 2.10.)

Opomba. Če imamo dve rešitvi začetnega problema, ki sta definirani na intervalih I_1 in I_2, potem oba intervala vsebujeta 0 in rešitvi se na preseku def. območij ujemata. Zato lahko definiramo rešitev na uniji.

Izrek 2.16. *(Maksimalni interval je odprt) Naj bo $E \subset \mathbb{R}^n$ odprta in $f \in C^1(E)$. Za vsak $x_0 \in E$ obstaja maksimalni interval J na katerem ima začetni problem (2.3) enolično rešitev. Interval J je odprt.*

Dokaz. (Že dokazali v izreku 2.10.). Iz dokaza izreka 2.15. sledi, da je interval J unija vseh odprtih intervalov, na katerih je rešitev definirana. Če bi bil interval npr. zaprt pri β, bi rešitev lahko lokalno nadaljevali kot v dokazu izreka 2.15. ♢

Opomba. Če je (α, β) maksimalni interval za (2.3), imenujemo $(\alpha, 0]$ in $[0, \beta)$ levi in desni maksimalni interval po vrsti.

Posledica 2.17. *Pod predpostavkami izreka 2.15. velja: če obstaja*

$$\lim_{x \to \beta^-} x(t) = x_1,$$

potem je $x_1 \in \partial E$.

Izrek 2.18. *Naj bo $E \subset \mathbb{R}^n$ odprta in $f \in C^1(E)$ in $[0, \beta)$ desni maksimalni interval eksistence rešitve x začetnega problema (2.3). Recimo, da obstaja tak kompakt $K \subset E$, da je množica $x([0, \beta)) \subset K$. Potem je $\beta = \infty$.*

Dokaz. Če bi veljalo $\beta < \infty$, potem bi moral za vsak K obstajati $x(t) \notin K$, $t \in [0, \beta)$. ♢

Opomba. Rešitev sistema ali obstaja za za vse čase, če pa ne obstaja za vse čase, potem v končnem času zadene rob. Ne more se zgoditi, da obstaja za končen čas in ima limito v notranjosti.

Izrek 2.19. *(Zvezna odvisnost definicijskega območja) Naj bo $E \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, ki vsebuje x_0 in naj ima začetni problem (2.3) rešitev $x(t, x_0)$ definirano na zaprtem intervalu $[a, b]$. Potem obstajata $\delta > 0$ in taka pozitivna konstanta k, da ima za vsak $y \in B(x_0, \delta)$ začetni problem*

$$\dot{x} = f(x),\ x(0) = y$$

rešitev $x(t, y)$, definirano na $[a, b]$, ki zadošča oceni

$$|x(t, y) - x(t, x_0)| \leq |y - y_0| e^{kt}$$

in

$$\lim_{y \to x_0} x(t, y) = x(t, x_0)$$

enakomerno na $[a, b]$.

Dokaz. Vse sledi iz zvezne odvisnosti od parametrov in kompaktnosti. Množica Ω je odprta, zato obstaja zaprta krogla $K(x_0, \delta)$, da je $[a, b] \times K(x_0, \delta) \subset \Omega$. Zaradi zvezne odvisnosti od podatkov je rešitev x v odvisnosti od podatkov zvezna, torej na relativno kompaktni množici enakomerno zvezna, zato je tudi gornja limita enakomerna. To pove tudi Gronwallova lema imamo za $t \in (\alpha, a]$

$$|x(t, y) - x(t, x_0)| \leq |y - x_0| e^{Ka}.$$

Zato je konvergenca na kompaktu $[a, b]$ enakomerna v y. $\diamondsuit$

3. Lokalna teorija za nelinearne sisteme

1. Izrek Hartman-Grobman

Zanima nas, pod katerimi pogoji je v okolici stacionarne točke fazni portret nelinearnega sistema $x' = f(x)$ 'enak' faznemu portretu nelinearnega. Iščemo difeomorfizem, definiran na okolici stacionarne točke, ki bi preslikal celoten fazni portret nelinearnega sistema na fazni portret linearnega sistema. Izkaže se, da lahko, če je f razreda C^1, dobimo le homeomorfizem. Če je f razreda C^2 in so realni deli lastnih vrednosti enakega predznaka, dobimo C^1 difeomorfizem (Hartman), potem pa se stvar v splošnem ustavi, ne glede na to, kako gladka je desna stran. Nekaj razlik je le v analitičnem primeru (Poincare).

Izrek 3.20. *(Izrek Hartman - Grobman) Naj bo $E \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, ki vsebuje izhodišče in φ_t tok sistema $\dot{x} = f(x)$. Naj bo 0 stacionarna točka sistema in naj bo $A = Df(0)$ brey centralnega podprostora. Potem obstaja homeomorfizem $H : U \to V$, ki slika okolico U izhodišča v okolico V izhodišča in 0 v 0 in za vsak $x_0 \in U$ obstaja odprti interval $I_0 \subset \mathbb{R}$, ki vsebuje 0, tako da velja*

$$H \circ \varphi_t(x_0) = e^{At} H(x_0).$$

Lema 3.21. *Naj bo A obrnljiva matrika, ki nima lastnih vrednosti na enotskem krogu in naj bo $A = A_+ \oplus A_-$ razcep na matriki, ki imata lastne vrednosti zunaj oz. znotraj S^1 in naj bo $\alpha = \max\{\|A_+\|, \|A_-^{-1}\|\}$. Potem za vsako omejeno funkcijo g oblike*

$$|g(x) - g(y)| \le \varepsilon |x - y|, \varepsilon \le \frac{1-\alpha}{2}$$

obstaja enolično določena zvezna preslikava $\varphi(x) = x + h(x)$, kjer je h omejena in velja

$$\varphi \circ A = f \circ \varphi, \quad f = A + g.$$

Če je f obrnljiva (tj. $\varepsilon \|A^{-1}\| < 1$), je φ homeomorfizem in če je $g(0) = 0$, je $h(0) = 0$.

Opomba. Lema pove, da lahko vsak difeomorfizem v okolici točke, ki nima lastnih vrednosti na enotski krožnici, konjugiramo v linearnega.

Dokaz. Dokaz je funkcionalno analitičen. Prepišimo našo enačbo v drugo obliko z upoštevanjem definicije f in φ :

$$\varphi \circ A = A + h \circ A = A + g \circ (id + h) + A \circ h.$$

Pokrajšamo in preuredimo:

$$h(Ax) - A(h(x)) = g(x + h(x)).$$

Definirajmo operator

$$U : B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \;\; U : h \to U(h)$$

s predpisom

$$U(h)(x) = h(Ax),$$

kjer je $B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ Banachov prostor omejenih zveznih preslikav, opremljen s sup normo. (Opomniti, da je v tem prostoru linearna preslikava $x \to Ax$ neomejen operator). Njegov inverz je dan z

$$U^{-1}(g)(x) = g(A^{-1}(x)) : U^{-1}U(h(x)) = U^{-1}(h(Ax)) = h(x).$$

Ker spremenimo le parametrizacijo, U ohranja normo, torej je izometrija in $\|U\| = 1$. Na enak način lahko pogledamo tudi operator A kot operator $B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, ki pomeni množenje z leve, torej $A(h)(x) = Ah(x)$. Naj bosta E^+ in E^- A-invarianta podprostora dobljena glede na lego lastnih vrednosti. Razcepimo

$$B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = B(\mathbb{R}^n, E^-) \oplus B(\mathbb{R}^n, E^+).$$

Ker sta $E^\pm$ invariantna za A, sta gornja prostora invariantna za U in A kot operator in zato sta invariantna tudi za razliko $R = U - A$. Nova oblika enačbe je

$$Rh = g(id + h).$$

Za iskanje fiksne točke moramo R obrniti. Tako bi dobili enačbo

$$h = R^{-1} g(id + h).$$

Označimo z $U_\pm, R_\pm$ ustrezne razcepe. Pišimo bločno

$$A = \begin{bmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & A_- \end{bmatrix}$$

in poglejmo, kaj so razcepi. Naj bo $h = [h_+, h_-]^T$ razcep glede na $E^\pm$. Potem je

$$Ah = [A_+ h_+, A_- h_-]^T$$

in $U_\pm(h)(x) = h_\pm(Ax)$. Razliko $R_\pm$ lahko zapišemo kot

$$R_\pm(h) = -A_\pm h_\pm + U_\pm(h) = -A_\pm(h_\pm - A_\pm^{-1}U_\pm(h)) = U_\pm(-U_\pm^{-1}A_\pm + I)(h).$$

Ker je $\|A_-^{-1}\|U_- \leq \alpha < 1$, ima operator $I - A_-^{-1}U_-$ inverz dan z vrsto:

$$(I - A_-^{-1}U_-)^{-1} = \sum_0^\infty (A_-^{-1}U_-)^n$$

z normo največ $(1-\alpha)^{-1}$. Torej je

$$R_-^{-1} = -(I - A_-^{-1}U_-)^{-1}A_-^{-1}$$

Podobno je tudi

$$\|U_+^{-1}A_+\| \leq \alpha,$$

zato ima inverz tudi R_+,

$$R_+^{-1} = (I - U_+A_+^{-1})^{-1}U_+^{-1}$$

in njegova norma je največ $(1-\alpha)^{-1}$. Zato je R obrnljiv in norma inverza je največ

$$\|(R_+^{-1}, R_-^{-1})\| = \|R^{-1}\| \leq \frac{2}{1-\alpha}.$$

Pokazati moramo, da je operator v enačbi

$$h = R^{-1}g(id + h)$$

skrčitev. Ocenimo

$$\begin{aligned}
&\|R^{-1}(g(x + h_1(x)) - R^{-1}(g(x + h_2(x)))\| \\
&\frac{2}{1-\alpha}\|g(x + h_1(x)) - g(x + h_2(x)\| \\
&\leq \frac{2}{1-\alpha}\varepsilon\|h_1(x) - h_2(x)\|.
\end{aligned}$$

Ker je bil po predpostavki ε dovolj majhen, je norma tega operatorja pod 1. Zato obstaja natanko ena fiksna točka, torej imamo eksistenco in enoličnost.

Privzemimo, da je f obrnljiva. Oglejmo si enačbo za potencialni inverz, tj.

$$\theta \circ f = A \circ \theta.$$

Pišemo $\theta = id + k$, definiramo $U(k)(x) = k(f(x))$ in ker je f obrnljiva, je U obrnljiva izometrija. Razpišemo gornjo enačbo in dobimo

$$Ak - U(k) = g.$$

Za enak način kot prej dokažemo, da je $R = U - A$ obrnljiv in definiramo

$$k = -R^{-1}g.$$

Komponiramo gornjo enačbo z φ z desne in dobimo

$$\theta \circ f \circ \varphi = A \circ \theta \circ \varphi.$$

Po definiciji φ je

$$\theta \circ f \circ \varphi = \theta \circ \varphi \circ A.$$

To pa pomeni, da je $\theta \circ \varphi$ komutira z A in je zato enolična rešitev prvega problema za $g = 0$, vemo pa, da ta problem reši identiteta. Zato je $\theta \circ \varphi = I$. Podobno dobimo še identiteto za obrnjen kompozitum, če pokažemo, da ima tudi enačba $\varphi \circ f = f \circ \varphi$ eno samo rešitev. Ponoviti moramo ves postopek, kjer definiramo le operator U drugače: $U(h(x)) = h(f(x))$. Dobimo enačbo

$$\varphi \circ f = f + h \circ f = A + g + h \circ f = A + g \circ (id + h) + A \circ h.$$

Preuredimo in dobimo

$$h \circ f - A \circ h = g \circ (id + h) - g.$$

Preslikava $R = U - A$ ima natanko enake lastnosti kot prejšnja, zato je obrnljiva z enako oceno za normo inverza. Da je skrčitev pokaže ocena

$$\begin{aligned}
&\|R^{-1}(g(x + h_1(x)) + g(x)) - R^{-1}(g(x + h_2(x)) + g(x))\| \\
&\frac{2}{1-\alpha}\|g(x + h_1(x)) - g(x + h_2(x)\| \\
&\leq \frac{2}{1-\alpha}\varepsilon\|h_1(x) - h_2(x)\|,
\end{aligned}$$

zato obstaja ena sama rešitev. S komponiranjem enačb v obratni smeri dobimo, da je $\varphi \circ \theta = I$.

Pogledamo kompozita

$$\varphi \circ \theta \circ f = \varphi \circ A \circ \theta \text{ in}$$

$$f \circ \varphi \circ \theta = \varphi \circ \theta \circ f$$

in iz enolišnosti sledi, da je tudi $\varphi \circ \theta = id$. Zato je φ homeomorfizem. Naj bo še $g(0) = 0$. Potem je

$$\varphi(0) = A(\varphi(0)).$$

Ker A nima lastne vrednosti 1, je to možno le za $\varphi(0) = 0$. $\diamondsuit$

Dokaz izreka Hartman-Grobman.
(1). Omejimo se lahko na primer, ko ima $f - Df(0)$ kompakten nosilec. Naj bo

$$A = Df(0) = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}.$$

Potem je

$$f = A + g$$

na okolici točke 0. Funkcija g je reda $o(\|x\|)$. Odrežimo g izven kroga z radijem s_0 z gladko cut-off funkcijo. Dobimo novo funkcijo $\tilde{f} = A + \tilde{g}$, ki se na okolici 0 ujema s prvotno. Zato sta fazna portreta enaka (s parametrizacijo vred). Ker je $g(0) = 0$ in $Dg(0) = 0$, lahko za vsak $\delta > 0$ najdemo s_0, da je

$$\|g(x) - g(y)\| \leq \delta \|x - y\|,$$

zato lahko dosežemo, da na dovolj majhni okolici velja enaka ocena tudi za $\tilde{g}$. Zato lahko f nadomestimo s $\tilde{f}$ in uporabljamo kar iste oznake.
(2). Dokažimo da je za vsak t tok φ_t za f oblike

$$\varphi_t(x) - e^{At}x = g_t(x),$$

kjer g_t Lipschitzova s konstanto ε. Oglejmo si odvod

$$\Phi(x,t) = D_x(\varphi_t(x)).$$

Integralsko enačbo

$$\varphi_t(x) = x + \int_0^t f(\varphi_s(x))ds$$

odvajamo po x in dobimo

$$D_x(\varphi_t(x)) = I + \int_0^t D_x f(\varphi_s(x)) D_x(\varphi_s(x)) ds.$$

Če odvajamo še po t in pišemo $D_x\varphi_t = \Phi(t,x)$, dobimo

$$\dot{\Phi}(t,x) = D_x f(\varphi_t(x))\Phi(t,x)$$

in gornji integral je rešitev te enačbe pri začetnem pogoju $\Phi(0,x) = I$. V točki 0 je $\varphi_t(0) = 0$, zato dobimo enačbo

$$D_x(\varphi_t(0)) = I + \int_0^t D_x f(\varphi_s(0)) D_x(\varphi_s(0)) ds = I + \int_0^t A D_x(\varphi_s(0)) ds,$$

kar je rešitev enačbe $\dot{Y} = AY$ pri začetnem pogoju $Y(0) = I$, torej je

$$D_x(\varphi_t(0)) = e^{At}.$$

Zato je po Taylorju

$$\varphi_t(x) = e^{At}x + g_t(x),$$

kjer je g_t Lipschitzova z ustrezno konstanto vsaj okoli 0, saj je po Taylorju $g_t(x) = o(|x|)$. Vstavimo

$$\varphi_t = e^{At} + g_t$$

integralsko enačbo

$$D_x(\varphi_t(x)) = I + \int_0^t D_x f(\varphi_s(x)) D_x(\varphi_s(x)) ds.$$

Dobimo

$$\begin{aligned}
e^{At} + D_x g_t &= I + \int_0^t D_x f(\varphi_s(x))(e^{As} + D_x g_s) ds \\
&= I + \int_0^t (A + D_x g(\varphi_s(x)))(e^{As} + D_x g_s) ds \\
&= I + \int_0^t A e^{As} ds + \int_0^t D_x g(\varphi_s(x)) e^{As} ds \\
&\quad + \int_0^t D_x f(\varphi_s(x)) D_x g_s \\
&= e^{At} + \int_0^t D_x f(\varphi_s(x)) D_x g_s ds + \int_0^t D_x g(\varphi_s(x)) e^{As} ds.
\end{aligned}$$

Krajšamo in dobimo

$$D_x g_t = \int_0^t D_x f(\varphi_s(x)) D_x g_s ds + \int_0^t D_x g(\varphi_s(x)) e^{As} ds.$$

Norma ustreza

$$\|D_x g_t\| \leq \int_0^t \|D_x f(\varphi_s(x))\| \|D_x g_s\| ds + \delta \| \int_0^t e^{As} \| ds \leq M_1 \int_0^t \|g_s\| ds + \delta M_2$$

Vidimo, da je norma $D_x g_t$ omejena za vsak t. Po Gronwallu je $\|D_x g_t\| \leq \delta e^{Mt}$ za $t \in [0,1]$. Za vsak $t \in [0,1]$ lahko z ustrezno izbiro δ zadnji integral naredimo enakomerno poljubno majhen.

(3) Naj bo φ_t tok za f, $L = e^A$ in $T = \varphi_1$. Po (2) lahko uporabimo lemo za $A = L$ in $f = T$ in dobimo enoličen homeomorfizem H_0 z lastnostjo $H_0(0) = 0$ in $h - id$ omejeno. Trdimo, da velja

$$\varphi_t \circ H_0 = H_0 \circ e^{At}$$

za vsak t. Gornjo zvezo lahko zapišemo v obliki

$$\varphi_t \circ H_0 \circ e^{-At} = H_0.$$

Vemo, da zveza velja za $t = 1$. Najprej bomo dokazali, da tudi preslkave $H_t := \varphi_t \circ H_0 \circ e^{-At}$ konjugirajo L in T. Izračunajmo

$$\begin{aligned}
H_t \circ e^A &= \varphi_t \circ H_0 \circ e^{-At} \circ e^A \\
&= \varphi_t \circ H_0 \circ e^A \circ e^{-At} \\
&= \varphi_t \circ \varphi_1 \circ H_0 \circ e^{-At} \\
&= \varphi_1 \circ \varphi_t \circ H_0 \circ e^{-At} \\
&= \varphi_1 \circ H_t.
\end{aligned}$$

Če znamo pokazati, da je $H_t = id + h_t$, kjer je h_t omejena, bomo zaradi enoličnosti v izreku dobili, da je H_t enolična rešitev enačbe

$$H_t = \varphi_1 \circ H_t \circ e^{-A}$$

in zato enaka H. Izračunajmo razliko

$$\begin{aligned}
h_t &= H_t - Id = \varphi_t \circ H_0 \circ e^{-At} - I \\
&= ((e^{At} + g_t)(id + h) - e^{At}) e^{-At} \\
&= (e^{At} + e^{At} h + g_t(id + h) - e^{At}) e^{-At} \\
&= (e^{At} h + g_t(id + h)) e^{-At}.
\end{aligned}$$

Ker st h in g_t omejeni, je tudi ta izraz omejen (v sup normi). $\diamondsuit$

Opomba. Res smo konstruirali homeomorfizem $\mathbb{R}^n$ nase, vendar smo polje spremenili, saj smo ga izven kompakta odrezali. Zato bo homeomorfizem preslikal tokovnice sistema na tokovnice linearnega sistema le v okolici 0.

Opomba. Če je f razreda C^2 in so realni deli lastnih vrednosti enakega predznaka, je H razreda C^1.

Izrek 3.22. *(Izrek o stabilni mnogoterosti) Naj bo $E \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, ki vsebuje izhodišče in φ_t tok sistema $\dot{x} = f(x)$ in $f \in C^1(E)$. Naj bo 0 (hiperbolična) stacionarna točka sistema in naj ima $Df(0)$ k lastnih vrednosti z negativnim realnim delom in $n - k$ takih s pozitivnim. Potem obstaja k-dimenzionalna C^1 mnogoterost W^s, ki je v 0 tangentna na E^s, invariantna za φ_t in za vsak $x_0 \in S$ velja*

$$\lim_{t \to \infty} \varphi_t(x_0) = 0.$$

Obstaja $n - k$-dimenzionalna gladka mnogoterost W^u, ki je v 0 tangentna na E^u, invariantna za φ_t in za vsak $x_0 \in W^u$ velja

$$\lim_{t \to -\infty} \varphi_t(x_0) = 0.$$

Dokaz. Iz izreka Hartman-Grobman takoj dobimo eksistenco nestabilne in stabilne mnogoterosti v okolici stacionarne točke. Potem pa celotno stabilno mnogoterost dobimo tako, da jo pošljemo s tokom v negativne čase, analogno definiramo nestabilno. $\diamondsuit$

Izrek 3.23. *(Izrek o centralni mnogoterosti) Naj bo $E \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, ki vsebuje izhodišče in φ_t tok sistema $\dot{x} = f(x)$. Naj bo 0 stacionarna točka sistema in naj ima $Df(0)$ k lastnih vrednosti z negativnim realnim delom, j takih s pozitivnim in $n-j-k = m$ z ničelnim. Potem obstaja m-dimenzionalna gladka mnogoterost W^c, ki je v 0 tangentna na E^c, invariantna za φ_t.*

Opomba. Centralna mnogoterost ni nujno enolična.

Primeri.

1. Rešimo sistem

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -y\\ \dot{z} &= z + y^2.\end{aligned}$$

Prvi sistem ima rešitvi $y = ae^{-t}$ in $z = (b + a^2/3)e^t - a^2/3e^{-2t}$ pri začetnem pogoju (a, b). Lineariziran primer je

$$\begin{aligned}\dot{Y} &= -Y\\ \dot{Z} &= Z\end{aligned}$$

s tokom $Y = ae^{-t}$ in $Z = be^t$. Preslikava $H(y, z) = (y, z + y^2/3)$ je analitična preslikava z inverzom $H^{-1}(Y, Z) = (Y, Z - Y^2/3)$. H lahko poiščemo tudi z nastavkom. Po privzetku je $H = id + h$, zato izberemo

$$H = \begin{pmatrix} z + a_1z^2 + b_1zw + c_1w^2 + \ldots \\ w + a_2z^2 + b_2zw + c_2w^2 + \ldots \end{pmatrix}.$$

Zapišemo enačbi

$$e^{At}H(a, b) = \begin{pmatrix} e^{-t}(a + a_1a^2 + b_1ab + c_1b^2 + \ldots) \\ e^t(b + a_2b^2 + b_2ab + c_2b^2 + \ldots) \end{pmatrix},$$

in $H \circ \varphi_t(a, b)$. Prva komponenta je enaka

$$\begin{aligned}H \circ \varphi_t(a, b)_1 &= ae^{-t} + a_1ae^{-2t} + b_1ae^{-t}((b + a^2/3)e^t - a^2/3e^{-2t}) + \\ &\quad + c_1((b + a^2/3)e^t - a^2/3e^{-2t})^2 + \ldots\end{aligned}$$

druga pa

$$\begin{aligned}H \circ \varphi_t(a, b)_2 &= (b + a^2/3)e^t + (-a^2/3 + a_2a - a^2/3)e^{-2t} + b_2ae^{-t}(b + a^2/3)e^t + \\ &\quad + c_2((b + a^2/3)e^t - a^2/3e^{-2t})^2 + \ldots\end{aligned}$$

Primerjamo člene

$$e^{-t} : a = a + b_1ab - 2c_1(b + a^2/3)a^2/3 + ...$$

Dobim polinoma v a, ki morata biti identična, kar pomeni, da je $b_1 = 0, c_1 = 0, \ldots$ itd. V drugi vrsti imam podobno. Dobim $a_2 = a/3$, ostali pa morajo biti 0.

2. Rešimo sistem

$$\begin{aligned}\dot{y} &= 2y\\ \dot{z} &= 4z + y^2.\end{aligned}$$

Ta ima lastni vrednosti 2 in 4, ki sta v resonanci. Dobimo rešitev $y = ae^{2t}$, pri iskanju nehomohene enačbe pa imamo resonanco, tj. po metodi inteligentnega ugibanja moramo iskati partikularno rešitev z nastavkom $z = Cte^{4t}$. Dobimo $C = a^2$, $z = be^{4t}(1 - a^2 t)$

Izkaže se, da ima vsak formalni H, ki bi tok konjugiral v linearnega, odvod v 0 degeneriran, tj. $\det JH = 0$. Če nastavimo enačbo za konjugiranje, dobimo, da mora biti linearni del druge komponente H ničelen.

$$H = \begin{pmatrix} z + a_1 z^2 + b_1 zw + c_1 w^2 + \dots \\ w + a_2 z^2 + b_2 zw + c_2 w^2 + \dots \end{pmatrix}.$$

Zapišemo enačbi

$$e^{At}H(a,b) = \begin{pmatrix} e^{2t}(a + a_1 a^2 + b_1 ab + c_1 b^2 + \dots) \\ e^{4t}(b + a_2 b^2 + b_2 ab + c_2 b^2 + \dots) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}H \circ \varphi_t(a,b)_1 &= ae^{2t} + a_1 ae^{4t} + b_1 ae^{2t} be^{4t}(1 - a^2 t) + \\ &\quad + c_1 be^{8t}(1 - a^2 t)^2 + \dots \\ H \circ \varphi_t(a,b)_1 &= be^{4t}(1 - a^2 t) + a_2 ae^{4t} + \\ &\quad + b_2 ae^{2t} be^{4t}(1 - a^2 t) + c_2 be^{8t}(1 - a^2 t)^2 + \dots.\end{aligned}$$

Vidimo, da morajo biti zaradi členov e^{4t} in dalje vsi koeficienti v 1. vrsti enaki 0. V drugi morajo biti 0 koeficienti a_2 in dalje enako 0, prva enačba pa sploh ni izpolnjena. Če vzamemo v nastavku za H člen pri w v 2. vrsti pomnožen z a_0, dobimo, da mora biti $a_0 = 0$.

Izrek 3.24. *(Poincare) Naj bo sistem*

$$x' = Ax + g(x)$$

analitičen, $g(0) = 0$, $Dg(0) = 0$ *in naj bodo* λ_i *lastne vrednosti* A. *(a) Če so lastne vrednosti nad* $\mathbb{Z}$ *linearno neodvisne, tj.* $\sum c_i \lambda_i \neq 0$ *za* $c_i \in \mathbb{Z}$, *potem je* *sistem formalno biholomorfen svoji linearizaciji, tj. obstaja formalna potenčna vrsta H, tako da je $H \circ \varphi_t = \psi_t \circ H$, kjer je φ tok originalnega sistema, ψ pa tok linearnega sistema. (b) Če lastne vrednosti ležijo na eni strani premice skozi izhodišče, je vrsta tudi konvergentna.*

Izrek 3.25. *Naj bo dan sistem $\dot{x} = f(x)$ in naj bo φ_t pripadajoči tok. Naj bo D omejeno območje z dovolj gladkim robom in definirajmo*

$$V(t) = \int_{\varphi_t(D)} dV.$$

Potem je

$$\dot{V}(t) = \int_{\varphi_t(D)} \operatorname{div} f dV.$$

Dokaz. Dokaz gre podobno kot v linearnem primeru. Prevedemo integral na D in dobimo

$$V(t) = \int_D \det(D_x\varphi_t) dV.$$

Izračunali smo (v dokazu izreka Hartman -Grobman), da $D_x\varphi_t$ reši diferencialno enačbo

$$\dot{\Phi}(t,x) = D_x f(\varphi_t(x))\Phi(t,x).$$

Zato je zaradi multilinearnosti determinante (kot v Liouvillovi formuli)

$$D_t(\det(D_x\varphi_t)) = \operatorname{sled}(D_x f(\varphi_t(x))) \det(D_x\varphi_t)$$

in velja

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \int_D D_t \det(D_x\varphi_t) dV \\
&= \int_D \operatorname{sled}(D_x f(\varphi_t(x))) \det(D_x\varphi_t) dV \\
&= \int_{\varphi_t(D)} \operatorname{sled}(D_x f) dV.
\end{aligned}$$

Ker pa je sled odvoda divergenca, je izrek dokazan. $\diamondsuit$

2. Stabilnost in funkcija Ljapunova

Definicija 3.26. *Naj bo φ_t tok sistema $\dot{x} = f(x)$. Ravnovesna točka x_0 je stabilna, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $x \in B(x_0, \delta)$ velja $\varphi_t(x) \in B(x_0, \delta)$. Ravnovesna točka je nestabilna, če ni stabilna. Ravnovesna točka je asimptotsko stabilna, če je stabilna in če obstaja tak $\delta > 0$, da je limita* $\lim_{t\to\infty} \varphi_t(x) = x_0$.

Iz izreka Hartman-Grobman sledi, da je vsak ponor asimptotsko stabilen, izvor pa asimptotsko nestabilen. Zato so hiperbolične ravnovesne točke ali asimptotsko stabilne ali nestabilne. Velja tudi obrat (brez dokaza).

Izrek 3.27. *Naj bo x_0 stabilna točka sistema $\dot{x} = f(x)$. Potem nobena lastna vrednost $Df(x_0)$ nima pozitivnega realnega dela.*

Obravnava nehiperboličnih fiksnih točk je precej bolj zahtevna. Naj bo $f, V \in C^1(E)$, V je funkcija in naj bo φ_t tok sistema. Izračunajmo odvod V vzdolž tokovnice $\varphi_t(x)$ pri $t = 0$:

$$\dot{V}(x) := \frac{\partial}{\partial t} V(\varphi_t(x))|_{t=0} = DV(x)f(x).$$

Recimo, da je $\dot{V}(x) < 0$ na E. To pomeni, da z naraščajočim t funkcija V pada vzdolž vsake tokovnice. Vsaka tokovnica je zato transverzalna na nivojnice $V = c$. Če je $\dot{V}(x) \leq 0$ na E in enaka 0 samo pri x_0 in so za c blizu $V(x_0)$ nivojnice sklenjene, gredo tokovnice iz zunanjosti te sklenjene krivulje transverzalno noter. Zato je x_0 asimptotsko stabilna.

Opomba. Temu odvodu se reče Liejev odvod V v smeri vektorskega polja f.

Privzeti smemo, da je $x_0 = 0$ in $V(x_0) = 0$.

Izrek 3.28. *Naj bo $E \subset \mathbb{R}^n$ odprta množica, ki vsebuje izhodišče. Naj bo 0 stacionarna točka in naj obstaja gladka funkcija V na E, $V(0) = 0$ in $V > 0$ sicer. (a) Če je $\dot{V} \leq 0$, je 0 stabilna. (b) Če je $\dot{V} < 0$ na $E \setminus \{0\}$, je 0 asimptotsko stabilna. (c) Če je $\dot{V} > 0$ razen morda v 0, je 0 nestabilna. Funkcija V se imenuje funkcija Ljapunova.*

Dokaz. (a) Naj bo U_ε ε-krogla okoli 0, ki je cela v E in naj bo m_ε minimum V na ε-sferi S_ε okoli 0. Ta je pozitiven za vsak pozitiven ε. Izberimo tak $\delta > 0$,

da je $V < m_\varepsilon/2$ na U_δ. Ker je V padajoča (bolje: nenaraščajoča) vzdolž tokovnic, je na vsaki tokovnici skozi kako točko iz U_δ funkcija V manjša od m_ε za pozitivne čase. Zdaj pa vzemimo kako tako tokovnico in se vprašajmo, ali gre lahko iz U_ε z naraščajočim t. Recimo, da je pri nekem t in $x \in U_\delta$ tokovnica $\varphi_t(x)$ na S_ε. Potem ima V v tej točki vrednost, ki je najmanj m_ε, kar ne gre. Zato tokovnica ne more iz ε-krogle, torej je $\|\varphi_t(x)\| < \varepsilon$. Poleg tega je desni maksimalni interval neskončen.
(b) Recimo, da je V strogo padajoča vzdolž tokovnic. Kot prej ugotovimo, da mora cela tokovnica $\varphi_t(x)$ z začetkom v δ-okolici ležati v predpisani ε-okolici in ima zato vsaj eno stekališče y. Trdimo, da je eno samo in da je $y = 0$. Recimo, da ni res. Ker je V strogo padajoča na tokovnici, je $V(y) < V(\varphi_t(x))$ za vsak $t > 0$, za katerega je tok definiran. Če pokažemo, da je $\lim V(\varphi_t(x)) = 0$, bo iz tega sledilo, da je $V(y) = 0$ in ker je 0 edina točka s tako lastnostjo, je $y = 0$.

Pokažimo, da je $\lim V(\varphi_t(x)) = 0$. Recimo, da ni res in naj bo c minimum V na tokovnici in K kompaktna podmnožica zaprte ε-krogle okoli 0, kjer je $V \geq c$. Na K je $\dot{V}$ enakomerno omejen z $-\alpha$ navzgor, zato velja

$$V(\varphi_t(\varphi_T(x)) = V(\varphi_T(x)) + \int_0^t \dot{V}(\varphi_s(\varphi_T(x)))\, ds \leq \varphi_T(x) - \alpha t$$

za vsak $T > 0$. Zdaj pa vzemimo tako velik T, da je vrednost $V(\varphi_T((x))$ ε-blizu minima c. Po gornjem - ker imamo na voljo neskončno časa - lahko postane vrednost v nadaljevanju po tokovnici poljubno negativna, kar je v protislovju s privzetkom, da je c minimum. Zato mora biti

$$\lim V(\varphi_t(x)) = 0.$$

$\diamondsuit$

Opomba. Recimo, da je $V = 0$ v 0 in strogo pozitivna sicer. Oglejmo si ε-zaprto sfero. Potem minimum m funkcije na tej sferi pozitiven in gre proti 0, ko pošljemo ε proti 0. Naj bo krogla δ tako majhna, da je minimum po sferah pod $m/2$. Zato je vsaka nivojnica $V = c$ za $c \leq m/2$ kompaktna. Če so izpolnjene predpostavke iz (b), je nivojnica mnogoterost.

Primer. Sistem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_2 + x_2x_3 - x_1^3\\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1x_3 - x_2^3\\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - x_3^3\end{aligned}$$

ima linearni del enak

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

z lastnimi vrednostmi 0, $i \pm \sqrt{2}$. Funkcija Ljapunova je $V = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$. Preverimo lastnosti. Je pozitivna z edino ničlo 0, Liejev odvod pa je enak

$$DVf = (2x_1, 4x_2, 2x_3)f = -2(x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4) < 0$$

za $x \neq 0$. Po izreku je zato 0 asimptotsko stabilna, ni pa ponor.

3. Sedla, vozli, vrtinci in centri v $\mathbb{R}^2$

Naj bo 0 izolirana kritična točka za sistem $\dot{x} = f \in C^1$ v ravnini.

Definicija 3.29. *Točka* 0 *je center, če ima dovolj majhno okolico, v kateri so vse tokovnice (razen* 0*) sklenjene. Točka* 0 *je center - vrtinec, če obstaja zaporedje sklenjenih tokovnic z limito* 0*, med katerimi so nesklenjene tokovnice, ki se vrtinčijo k eni od sklenjenih sosed. Točka* 0 *je stabilni vrtinec, ce se tokovnive vrtinčijo k njej in nestabilni, če se vrtinčijo od nje. Izhodišče je stabilni (nestabilni) vozel, če se mu tokovnice približujejo (oz. se oddaljujejo) vzdolž dobro definirane tangente (oz je tangenta dobro definirana za negativne čase). Če so s tangentnimi smermi pokrite vse smeri, je vozel pravi. Izhodišče je topološko sedlo, če obstajajo tokovnice* $G_1, \ldots G_4$*, tako da velja: vzdolž prvih dveh gremo z naraščajočim časom v izhodišče, vzdolž drugih dveh gremo s padajočim časom v izhodišče (stabilna in nestabilna mnogoterost). Te tokovnice se imenujejo separatrice.*

Izrek 3.30. *Hiperbolična ravnovesna točka je natanko tedaj topološko sedlo, ko sedlo za lineariziran primer. Hiperbolična točka je natanko tedaj 1.stabilen vozel, 2. nestabilen vozel, 3. stabilni vrtinec, 4. nestabilni vrtinec, ko je 1. 2. 3. 4. po vrsti za linearen primer.*

Sledi naravnost iz izreka Hartman Grobman.

Izrek 3.31. *Naj bo izhodišče center za lineariziran problem. Potem je za originalni problem center, vrtinec ali center-vrtinec. Če je f analitična, ne more biti center-vrtinec. (Dulac)*

Izrek 3.32. *Naj bo izhodišče center za lineariziran problem in naj bo originalen problem simetričen glede na od x (ali y). Potem je za originalni problem izhodišče center.*

Dokaz. Ker vemo, da imamo kroženje in da morajo biti tokovnice simetrične, je možnost s kombinacijami vrtincev izključena. $\diamondsuit$

4. Nehiperbolične kritične točke v $\mathbb{R}^2$

Imamo analitičen sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x,y) = P_m(x,y) + o(r^m) \\ \dot{y} &= Q(x,y) = Q_m(x,y) + o(r^m). \end{aligned}$$

definiran na E in naj ima stacionarno točko 0. Naj se razvoja P in Q v Taylorjevo vrsto začneta s členi stopnje m. Naj bosta P_m in Q_m prva člena razvoja. Zapišimo gornji sistem še v polarni obliki. Ker je

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \\ \dot{\theta} &= -\frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{r^2}, \end{aligned}$$

dobimo iz zvez $y/r = \sin\theta$ in $x/r = \cos\theta$ naslednji enačbi v primeru homogenosti reda m:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= r^{m-1}(Q_m \cos\theta - P_m \sin\theta) + o(r^{m-1}) = r^{m-1} g_m(\theta) + o(r^{m-1}), \\ \dot{r} &= r^m(P_m \cos\theta + Q_m \sin\theta) + o(r^m) = r^m h_m(\theta) + o(r^m). \end{aligned}$$

Naj bo $(r(t), \theta(t))$ rešitev, ki se približuje $(0, \theta_0)$ ko $t \to \infty$. Privzemimo, da je izraz $h_m(\theta(t)) \simeq h_m(\theta_0) = c_0 \neq 0$. Komponenta r ima enačbo $\dot{r} = c(t) r^m$, zato se vede kot $r(t)^{1-m} \simeq c_0(1-m)t$ za velike t in gre proti 0. Ker mora biti $r > 0$, mora biti $c_0 < 0$ za velike t. Če to vstavimo v enačbo za θ, dobimo

$$\dot{\theta} r^{m-1} g_m(\theta_0) \simeq (c_0(1-m)t)^{-1} g_m(\theta_0)$$

Pri integraciji dobimo logaritem, zato ta limita ni nikoli končna, če je ali $c_0 \neq 0$ ali $g_m(\theta_0) \neq 0$.

Če naj tangentna smer $(\cos\theta, \sin\theta)$ obstaja in je $h_m(\theta) \neq 0$, mora veljati zveza

$$g_m(\theta) = \cos\theta Q_m(\cos\theta, \sin\theta) - \sin\theta P_m(\cos\theta, \sin\theta) = 0.$$

Če g_m ni identično 0, ima ta polinom - če vse zapišemo v kompleksnem - stopnjo $2(m+1)$ in zato največ $2(m+1)$ ničel, torej največ $2(m+1)$ smeri, ki so lahko v limiti tangentne za tokovnice. Recimo, da g_m ni identično 0. Rešitve, ki se približujejo izhodišču v fiksni smeri, razdelijo ravnino na več sektorjev, ki so lahko različnih oblik. Te rešitve se za hiperbolični primer imenujejo separatrice.

Recimo, da sta θ_0 in θ_1 zaporedni ničli g_m. Če je $h_m(\theta) > 0$ na celotnem intervalu, potem gredo tokovnice ven ali noter, odvisno od znaka h_m. Temu pravimo parabolični sektor. Če h_m na intervalu menja znak, se lahko zgodi dvoje v odvosnosti od kombinacij znakov h_m in g_m. Ali dobimo sliko, podobno četrtini faznega portreta sedelne točke ali pa dobimo zanke z α in ω limitno točko 0.

1. Hiperbolični sektor je homeomorfen delu faznega portreta sedelne točke med dvema separatricama. 2. Parabolični sektor je homeomorfen delu faznega portreta stabilnega pravega vozla. 3. Eliptični sektor je homeomorfen delu faznega portreta, kjer so med robnima tokovnicama zanke z začetno in končno točko v izhodišču. Homeomorfizem lahko obrne smer toka.

Primeri.
1. Vzemimo sistem

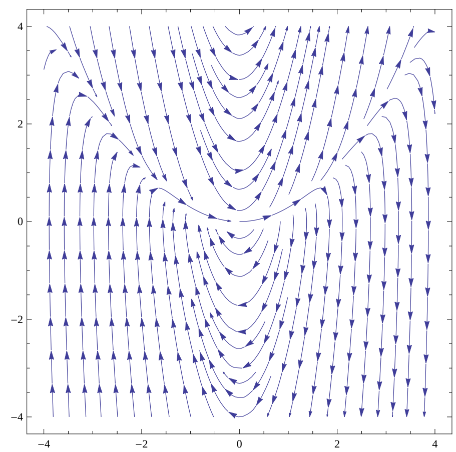
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x^3 + 4xy. \end{aligned}$$

Pri tem je $m = 1$, zato imamo

$$g_1(s) = 0 - \sin s \sin s = 0.$$

Dobimo $s = 0, \pi$. To sta tangentni smeri. Funkcija $h_1(s) = \sin(s)\cos(s)$. Poskusimo najti kakšno rešitev. Recimo, da obstaja polinomska, $y = cx^a$.

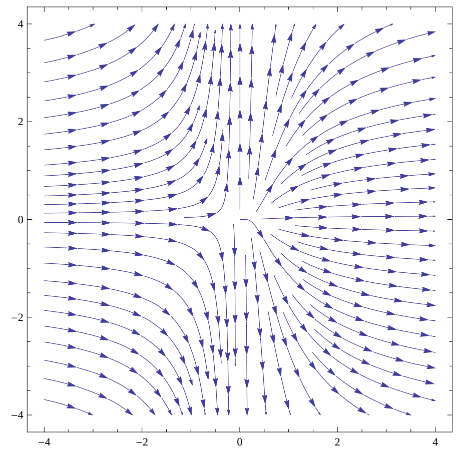
Izračunajmo
$$\dot{y} = cax^{a-1}\dot{x} = cax^{a-1}cx^a = c^2ax^{2a-1}.$$
Vstavimo v drugo enačbo in dobimo
$$c^2ax^{2a-1} = -x^3 + 4xcx^a.$$
Izračunamo $a = 2$ in $2c^2 = -1 + 4c$. Dobimo dve rešitvi. To da v resnici 4 tokovnice. Za $c = 1 + \sqrt{2}/2$ dobimo separatrici za hiperbolični del, za $c = 1 - \sqrt{2}/2$ pa dobimo krivuljo, ki pod seboj omejuje eliptični sektor. Med obema krivuljama je parabolični sektor. Imamo kritično točko z eliptičnim sektorjem.



Slika 3.1: Fazni portret sistema 1

2. Vzemimo sistem
$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2\\ \dot{y} &= y.\end{aligned}$$
Pri tem je $m = 1$, zato imamo
$$g(s) = \cos s \sin s = 0.$$
Dobimo $s = 0, \pi, \pm\pi/2$. To so tangentne smeri. Rešitve so
$$x(t) = \left(\frac{1}{x_0} - t\right)^{-1}, \quad y(t) = y_0e^t.$$

Gledamo limite na maksimalnem intervalu eksistence. Naj bo $x_0 > 0$. Ko gre $t \to x_0^{-1,-}$, gre $x \to +\infty$, $y \to$ *konst*, zato so tokovnice asimptotsko vzporednice. če je $x_0 = 0$, so tokovnice na osi y. če je $x_0 < 0$, potem rešitev nima pola in je definirana za vse $t \geq 0$. Ko gre $t \to \infty$, gre $x \to 0$ in $y \to \pm\infty$, odvisno od začetnega pogoja. Če je $y_0 = 0$, gre tokovnica po osi y. Tej situaciji pravimo sedlo-vozel.



Slika 3.2: Fazni portret sistema 2

3. Vzemimo sistem

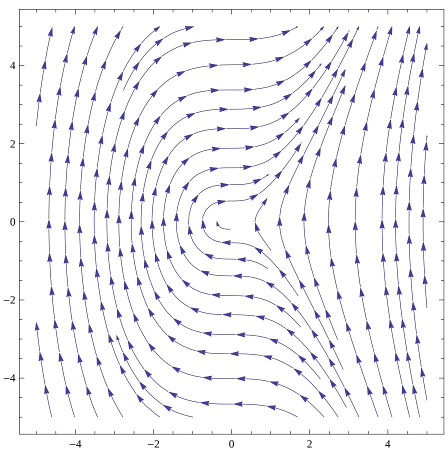
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^2. \end{aligned}$$

Pri tem je $m = 1$, zato imamo

$$g(s) = -\sin s \sin s = 0.$$

Dobimo $s = 0, \pi$. To so tangentne smeri. Kot v prvem primeru rešitev iščem z nastavkom $y = cx^a$. Dobimo $a = 3/2$ in $c^2 = a^{-1}$. To sta separatrici. Imamo špico v izhodišču in dva hiperbolična sektorja.

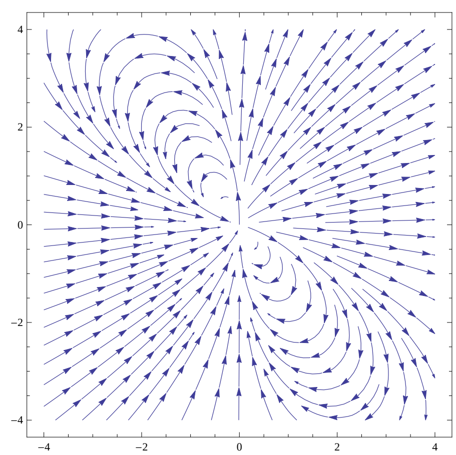
Vsi ti trije primeri so imeli red razvoja v vrsto 1. Kaj pa, če je višji?



Slika 3.3: Fazni portret sistema 3

4. Vzemimo sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 + xy \\ \dot{y} &= y^2/2 + xy. \end{aligned}$$



Slika 3.4: Fazni portret sistema 4

Pri tem je $m = 2$, zato imamo

$$g(s) = \cos s(\sin^2 s/2 + \sin s \cos s) - \sin s(\cos^2 s + \sin s \cos s) = -\cos s \sin^2 s/2 = 0.$$

Dobimo $s = 0, \pi, \pm\pi/2$. To so tangentne smeri. Pri začetnem pogoju $x_0 = 0$ je rešitev na osi y in gre v neskončnost za $y_0 > 0$ in proti 0 za $y_0 < 0$, pri začetnem pogoju $y_0 = 0$ je rešitev na osi x in gre v neskončnost za $x_0 > 0$ in proti 0 za $x_0 < 0$. V prvem in tretjem kvadrantu dobimo nekaj podobnega funkcijam x^a za $a < 1$, pri čemer gredo puščice v 1. kvadrantu ven, v tretjem pa noter. V drugem in četrtem imamo zanke (parabolična sektorja). To narišemo s primerjanjem območij naraščanja in padanja. Glej sliko.

5. Hamiltonski sistemi

Hamiltonski sistem je dan s funkcijo $H \in C^2(E)$, $H = H(x, y)$ in je naslednje oblike:

$$\dot{x} = H_y, \quad \dot{y} = -H_x.$$

Potem je H prvi integral tega sistema in je zato konstanten vzdolž rešitev. Običajno H v fiziki pomeni kako ohranjajočo količino, npr. energijo. Funkcija

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2)/2$$

je energijska funkcija za sferično nihalo in generira sistem

$$\dot{x}_1 = y_1, \ \dot{x}_2 = y_2, \ \dot{y}_1 = -x_1, \ \dot{y}_2 = -x_2.$$

To je sistem, ki pripada dvema nesklopljenima harmoničnima oscilatorjema.

Stacionarne točke Hamiltonskega sistema so natanko stacionarne točke H. Zanima nas zveza med klasifikacijo teh točk kot stacionarnih točk sistema in stacionarnih točk H.

Lema 3.33. *Če je izhodišče v $\mathbb{R}^2$ vrtinec Hamiltonskega sistema, potem ni strogi lokalni ekstrem funkcije H.*

Dokaz. Če je 0 stabilni vrtinec, potem gre vsaka rešitev z začetnim pogojem v dovolj majhni okolici 0 proti 0, ko gre $t \to \infty$. Na rešitvi je H konstanta in ker je v limiti enaka 0, je enaka 0 na celi tokovnici. Zato nimamo lokalnega ekstrema. Isto za nestabilni vrtinec. $\diamondsuit$

Opomba. Isto velja za izvor ali ponor. Dejstva, da se vrtinčimo okoli 0, nismo uporabili.

Izrek 3.34. *Nedegenerirana kritična točka analitičnega Hamiltonskega sistema je ali topološko sedlo ali center. Topološko sedlo je natanko tedaj, ko je sedelna točka H. Če je strogi lokalni ekstrem za H, je točka center sistema.*

Dokaz. Poglejmo linarizacijo Hamiltonskega sistema. Dobimo matriko

$$\begin{bmatrix} H_{xy} & H_{yy} \\ -H_{xx} & -H_{xy} \end{bmatrix}.$$

Determinanta je $H_{xx}H_{yy} - H_{xy}^2$. Hessejevka za H pa je

$$\begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} \\ H_{xy} & H_{yy} \end{bmatrix}$$

z enako determinanto. Vemo, da dobimo topološko sedlo natanko tedaj, ko je točka sedlo, torej je determinanta negativna in to pomeni, da je kritična točka sedelna tido za H. Točka je center linearnega sistema natanko tedaj, ko je je determinanta pozitivna in ima sled enako 0. Zato imamo pri nelinearnem ali center ali vrtinec po Dulacovem izreku. Vrtinec ne more biti po gornji lemi, zato je lahko le center. $\diamondsuit$

Divergenca Hamiltonskega sistema je 0, zato pripadajoč tok ohranja volumen.

4. Globalna teorija za dinamčne sisteme

Dinamični sistem je ime za sistem, kjer so tokovnice definirane za vse čase. Pokazali smo, da lahko vsakemu sistemu priredimo ekvivalenten dinamični sistem, vendar izgubimo gladkost. Mi se bomo omejili na sisteme razreda C^1 z defincijskim območjem E. Vektorske znake opuščamo.

1. Limitne možice in atraktorji

Najprej terminologija. Naj bo $\varphi_t(x)$ tok. Potem je množica

$$G^+ = \{\varphi_t(x), t \geq 0\}$$

pozitivna polorbita,

$$G^- = \{\varphi_t(x), t \leq 0\}$$

negativna polorbita, in

$$G = \{\varphi_t(x), t \in \mathbb{R}\}$$

orbita. Točka x je periodična, če je $\varphi_T(x) = x$ za nek T. Najmanjši tak $T > 0$ imenujemo perioda. Vse točke orbite periodične točke so periodične. Tiste s pozitivno periodo imenujemo regularne. Fiksne točke so tiste, za katere je $\varphi_t(x) = x$ za vsak t.

Točka p je ω-limitna točka, če obstaja tako zaporedje $t_n \to \infty$, da je

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_{t_n}(x) = p$$

in α-limitna točka, če obstaja tako zaporedje $t_n \to -\infty$, da je

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_{t_n}(x) = q.$$

Množica vseh ω-limitnih točk orbite G je ω-limitna množica G in jo označimo z $\omega(G)$ oziroma $\omega(x)$, če je G orbita skozi x. Isto za α. Množica $\omega(G) \cup \alpha(G)$

je limitna množica G. Orbito, ki pripada točki x označimo z $G(x)$. Vemo že, da če je ω limitna množica ena sama točka, je to stacionarna točka za sistem. Stabilni vozel ali vrtinec je ω stacionarna točka za vse točke svojr okolice.

Izrek 4.2. *Obe limitni množici sta zaprti v E. Če je G omejena, sta neprazni, povezani in kompaktni.*

Dokaz. Dokažimo za ω. Zaprtost je očitna, saj če $p_n \to p$, potem vzamemo diagonalno zaporedje in to ima limito p. Če je G^+ v kompaktu, mora imeti vsaj eno stekališče. Edina težava je povezanost. Recimo, da obstaja particija na $A \cup B$. Potem je med njima pozitivna razdalja δ. Potem obstaja naraščajoče zaporedje t_n-jev, ki so za sode indekse $\delta/2$ blizu A in za lihe vsaj $\delta/2$ stran od A. Ker je razdalja do A zvezna funkcija točke, obstaja zaporedje časov s_k, tako da je razdalja do A natanko $\delta/2$. Ker je množica $\varphi_{s_k}(x)$ omejena, ima stekališče, ki je tudi natanko $\delta/2$ stran od A. Potem pa ni ne v A ne v B. $\diamondsuit$

Izrek 4.3. *Naj bo $p \in \omega(G)$. Potem je $G(p) \subset \omega(G)$.*

Dokaz. Naj bo $p = \lim x_i$, kjer so $x_i = \varphi_{t_i}(x)$ iz dane orbite. Potem je za vsak t tudi zaporedje $\varphi_t(x_i)$ iz te orbite. zaradi zvezne odvisnosti od začetnih pogojev velja

$$\varphi_t(p) = \lim_{i \to \infty} \varphi_t(x_i) = \lim_{i \to \infty} \varphi_{t+t_i}(x),$$

torej je $\varphi_t(p)$ stekališče točk z orbite $\varphi_t(x)$. $\diamondsuit$

Iz tega sledi

Posledica 4.4. *Obe limitni množici sta invariantni za tok.*

Neprazna invariantna kompaktna množica je minimalna, če nima prave kompaktne podmnožice s temi lastnostmi. Če je C minimalna, je enaka svoji ω oz. α limitni množici.

Trditev 4.5. *Vsaka invariantna kompaktna množica C vsebuje minimalno invariantno podmnožico. Če je C homeomorfna zaprtemu m-disku, ima tudi fiksno točko.*

Dokaz. Družino invariantnih kompaktnih podmnožic delno uredimo. Ker ima vsaka (končna ali neskončna) padajoča veriga nepraznih kompaktov neprazen presek (izrek!), ima po Zornovi lemi minimalni element. Fiksno točko nam da Brouwerjev izrek o fiksni točki. (Ta pove, da ima vsaka zvezna preslikava zaprtega diska nase fiksno točko.) Naj bo $t_n \to 0$ zaporedje časov in poglejmo preslikave $\varphi_{t_n} : C \to C$. To so vse homeomorfizmi s fiksnimi točkami x_n (po Brouwerju). Te točke imajo stekališče x. Trdimo, da je to iskana fiksna točka. Privzeti smemo, da je kar limita. Vzemimo poljuben t. Naj bo n_j tako zaporedje, da je

$$n_j t_j \leq t < (n_j + 1)t_j$$

Ker je x_n fiksna točka za φ_{t_n}, je fiksna tudi za vsak njegov iterat $\varphi_{t_n}^{n_j} = \varphi_{t_n n_j}$. Ker gredo $t_n \to 0$, t pa je fiksen, gredo n_j proti ∞ in $t = \lim t_j n_j$ (po izreku o sendviču). Ker imamo zvezno odvisnost od začetnih podatkov, je

$$\varphi_t(x) = \lim_{j\to\infty} (\varphi_{t_j n_j} x_j) = \lim_{j\to\infty} x_j = x.$$

$\diamondsuit$

Definicija 4.6. *Zaprta invariantna množica $A \subset E$ je privlačna množica za sistem, če ima tako okolico U, da imajo vse orbite za začetne točke iz te okolice ω-limitno množico v A in so za vse začetne točke iz U tudi njihove pozitivne polorbite v U. Taka množica se imenuje atraktor, če vsebuje gosto orbito.*

Opomba. Stabilni vozel ali vrtinec je atraktor, saj je točka. Sedelna točka ni atraktor, čeprav je ω limitna točka za stabilno mnogoterost.

Primeri.
1.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

V polarnih koordinatah je to sistem

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\varphi} &= 1 \end{aligned}$$

Ta ima fiksno točko 0 in periodično orbito $r = 1$. Ker je odvod po r pozitiven znotraj enotskega kroga gredo tokovnice stran od 0. Izven kroga je negativen, zato se mu tokovnice približujejo. Enotska krožnica je atraktor. Taki krožnici pravimo stabilni cikel. Če bi dali oklepaj na kvadrat, bi dobili atraktor, ki bi bil na eni strani privlačen, na drugi pa odbojen.

2. Obravnavajmo sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2 - z^2)\\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2 - z^2)\\ \dot{z} &= 0.\end{aligned}$$

Polje nima komponente v z=smeri z. Situacija je za vsak fiksen z enaka kot zgoraj, zato so vzporedniki na enotski sferi limitne kročnice. Za $x = y = 0$ je sistem trivialen, zato je vsaka točka na osi z fiksna točka.

3. Oglejmo si sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2)\\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2)\\ \dot{z} &= az\end{aligned}$$

Za vsak fiksen z imamo v prvih dveh komponentah situacijo 1. primera, z pa monotono narašča. Os z pa je orbita (oz. tri orbite, ker je 0 fiksna točka). Valj je privlačna množica. Dobimo spirale na valju za orbite. Za $a = 0$ se fazni protret spremeni, ker različna predznačenost pove, ali je smer odbojna ali privlačna.

4. Vzamemo 3.primer in identificiramo točke (x, y, z) in $(x, y, z + 2\pi)$. Potem imamo sistem, ki ima torus za atraktor. Os z se preslika v cikel, od katerega se tokovnice oddaljujejo, zato dobimo nestabilni cikel. Če je $a > 0$ iracionalni večkratnik π, potem se orbite za valju ne sklenejo in dobimo gosto orbito na torusu. Zato je torus atraktor.

5. Edward Lorenz je bil MIT meteorolog, ki je modeliral konvekcijo zraka, inducirano s toploto. Gledal je Lorenzov sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= s(y - x)\\ \dot{y} &= rx - y - xz\\ \dot{z} &= -bz + xy.\end{aligned}$$

Za parametre je izbral $s = 10$, $r = 28$ in $b = 8/3$ in gledal rešitve, pri čemer je začetne pogoje v prvem poskusu napisal na šest decimalk, v drugem pa na tri. Opazil je, da se rezultati po danem časovnem intervalu bistveno razlikujejo. Pravimo, da je sistem občutljiv na začetne pogoje. Za določene vrednosti parametrov s, r, b ima sistem čudno privlačno množico (Sparrow). Za $s = 10$, $r = 28$ in $b = 8/3$ ima sistem atraktor A, ki je sestavljen iz neskončno razvejanih ploskev, katerih listi se prepletajo in sekajo. Orbite se seveda ne sekajo ampak potujejo z enega lista na drugega. Atraktor ima števno periodičnih orbit s poljubno velikimi periodami, neštevno neperiodičnih orbitm in gosto orbito. Vsak atraktor, ki ima te lastnosti, se imenuje čuden atraktor.

Analizirajmo ta sistem natančneje. Takoj opazimo, da je invarianten za $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$ in ima os z za tokovnico (dve tokovnici plus fiksna točka v izhodišču). Imamo

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} -s & s & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

Iz karakterističnega polinoma

$$p(x) = (-b - x)(x^2 + x(s+1) - s(1-r)),$$

ki ima poleg $-b$ še ničli

$$x_{1,2} = \frac{(s+1) \pm \sqrt{(s+1)^2 + s(r+1)}}{2},$$

takoj ugotovimo, da je izhodišče asimptotsko stabilno za $r < 1$. Izkaže se, da za $r < 1$ ni drugih fiksnih točk. Funkcija

$$L(x, y, z) = rx^2 + sy^2 + sz^2$$

je funkcija Ljapunova z Liejevim odvodom

$$\dot{L} = -2s(r(x-y)^2 + (1-r)y^2 + bz^2)$$

Za $r \leq 1$ je $\dot{L} \leq 0$ in L ima minimum v izhodišču. Zato vse rešitve konvergirajo k izhodišču. Za $r > 1$ dobimo dve novi fiksni točki

$$(\pm(b(r-1))^{1/2}, \pm(b(r-1))^{1/2}, r-1),$$

ki imata (zaradi simetrije) enake lastne vrednosti. Za $r < 470/19 \approx 24.74$ sta asimptotsko stabilni, za $r = 470/19$ so lastne vrednosti pri $s = 10$ in

$b = 8/3$ enake $-\frac{41}{3}, \pm 4i\sqrt{\frac{110}{19}}$. Za $r > 470/19$ je realni del kompleksnih lastnih vrednosti pozitiven. Fiksna točka 0 pa ni več stabilna, ker je ena lastna vrednost pozitivna.

Za funkcijo Ljapunova zdaj vzamemo

$$L(x, y, z) = rx^2 + sy^2 + s(z - 2r)^2$$

z Liejevim odvodom

$$\dot{L} = -2s(rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 - br^2)$$

Naj bo E elipsoid, kjer je Liejev odvod pozitiven in M maksimum L na E. Naj bo E_1 (omejeno) območje, kjer je L omejen z $M + 1$. Na komplementu tega območja je Liejev odvod navzgor omejen s strogo negativno konstanto, zato se vrednosti L vzdolž tokovnic, ki se začnejo izven E_1, strogo zmanjšuje. Zato vsaka tokovnica sčasoma pride v E_1. Naj bo $\Lambda = \omega(E_1)$ končna limitna množica, ki jo imenujemo atraktor Lorenzovega sistema. Po definiciji je njena stabilna množica $W^+(\Lambda) = \mathbb{R}^3$, saj imajo vse rešitve stekališče v Λ. Zato Λ vsebuje vse fiksne točke in vse nestabilne mnogoterosti teh točk. Izračunajmo še divergenco

$$\operatorname{div} f = -s - 1 - b,$$

zato gre po Liouvillovem izreku

$$\dot{V}(t) = \int_{E_t} \operatorname{div} f = V(t)(-s - 1 - b)$$

volumen E_1 s tokom eksponentno proti 0, kar pomeni, da ima limitna množica Lebesguovo mero 0. To hkrati pomeni, da nobena od fiksnih točk ne more biti izvor.

Opazili smo, da se je pri $r = 1$ spremenil fazni portret sistema. Natančneje, pri $r < 1$ je fazni portret drugačen kot pri $r > 1$. Pravimo, da je $r = 1$ bifurkacijska točka. Lorenzov atraktor ima Hausdorffovo dimenzijo okoli 2.06.

Hausdorffova dimenzija, škatlasta dimenzija

Naj bo X metrični prostor in $N(r)$ najmanjše število krogel z radijem r, ki pokrijejo X. Ko gre r proti 0, gre $N(r) \to \infty$. Npr. če pokrivamo interval $[0, 1]$ s kroglami, potrebujemo n krogel z radijem $r = 1/(2n)$, torej je šrevilo krogel proporcionalno $(1/r)^1$. Podobno za kvadrat potrebujemo n^2 krogel (v normi neskončno) z radijem $r = (1/2n)$, zato število raste kot $(1/r)^2$ in je Hausdorffiva dimenzija kvadrata 2. Če $N(r)$ raste kot $1/r^d$, go gre $r \to 0$, potem ima X Hausdorffovo dimenzijo d. Formalna definicija je tale.

Definicija 4.7. *Naj bo X metrični prostor, $S \subset X$ in $d \in [0, \infty)$. Hausdorffova vsebina S je definirana kot*

$$C_H^d(S) := \inf\Big\{\sum_i r_i^d : \text{ obstaja pokritje } S \text{ s kroglami z radiji } r_i > 0\Big\}.$$

Količina $C_H^d(S)$ je infimum takih $\delta \geq 0$, za katere da obstaja indeksirana družina krogel $\{B(x_i, r_i) : i \in I\}$ s pozitivnimi radiji, ki pokrije S in zadošča $\sum_{i \in I} r_i^d < \delta$. (Dogovor: $\inf \emptyset = \infty$.) Hausdorffova dimenzija X je

$$\dim_{\mathrm{H}}(X) := \inf\{d \geq 0 : C_H^d(X) = 0\}.$$

Peanova krivulja ima Hausdorffovo dimenzijo 2, rob Brownovega gibanja v ravnini 4/3, možganska skorja okoli 2.8 in pljuča skoraj 3.

Za merjenje kompleksnosti atraktorjev (ali fraktalov) se uporablja še ena dimenzija, škatlasta dimenzija, ki se v veliko primerih ujema s Hausdorffovo. Naj bo (X, d) kompakten metrični prostor in $N_d(r)$ minimalno število krogel z radijem r, ki pokrijejo X. Potem je

$$\mathrm{bdim} = -\lim_{r \to 0} \frac{\log N_d(r)}{\log r}$$

Kot primer izračunajmo dimenzijo tretjinske Cantorjeve množice. Za $r = 1$ potrebujemo 1 kroglo. Za $r = 3^{-n}$ potrebujemo 2^n krogel. Rezultat je $\log 2 / \log 3 \approx 0.63$. Za nalogo izračunaj dimenzijo za ostale Cantorjeve množice, za njihove kartezične produkte, za Kochovo snežinko, trikotnike Sierpinskega itd.

6. Otto Rössler je bi nemški zdravnik, ki je prišel do kaosa pri svojem delu v kemiji in teoretični biologiji. Rösslerjev atraktor dobimo iz sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -(y+z) \\
\dot{y} &= x + ay \\
\dot{z} &= b + z(x-c),
\end{aligned}$$

kjer so $a, b, c > 0$. Ta sistem tudi ima čuden atraktor. Roessler ga je študiral za $a = 0.2, b = 0.2$ in $c = 5.7$. Ta atraktor ima samo eno mnogoterost. Stacionarni točki sta

$$\left(\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right)$$

in

$$\left(\frac{c-\sqrt{c^2-4ab}}{2}, \frac{-c+\sqrt{c^2-4ab}}{2a}, \frac{c-\sqrt{c^2-4ab}}{2a}\right).$$

Jacobijevka je

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & x-c \end{pmatrix},$$

karakteristični polinom pa

$$-\lambda^3 + \lambda^2(a+x-c) + \lambda(ac-ax-1-z) + x - c + az.$$

Ena od točk leži znotraj zanke v atraktorju. Za parametre $a = 0.2, b = 0.2$ in $c = 5.7$ so lastne vrednsoti

$$\lambda_1 = 0.0971028 + 0.995786i,\ \lambda_2 = 0.0971028 - 0.995786i,\ \lambda_3 = -5.68718$$

Pripadajoči lastni vektorji so

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0.7073 \\ -0.07278 - 0.7032i \\ 0.0042 - 0.0007i \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0.7073 \\ 0.07278 + 0.7032i \\ 0.0042 + 0.0007i \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0.1682 \\ -0.0286 \\ 0.9853 \end{pmatrix}.$$

Druga točka ima lastne vrednosti

$$\lambda_1 = -0.0000046 + 5.4280259i,\ \lambda_2 = -0.0000046 - 5.4280259i,$$

$$\lambda_3 = 0.1929830$$

in lastne vektorje

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0.0002422 + 0.1872055i \\ 0.0344403 - 0.0013136i \\ 0.9817159 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0.0002422 - 0.1872055i \\ 0.0344403 + 0.0013136i \\ 0.9817159 \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0.0049651 \\ -0.7075770 \\ 0.7066188 \end{pmatrix}.$$

Vidimo, da ima eno odbojno smer. Zgodba je podobna kot pri Lorenzovem atraktorju. Točka se po spiralah oddaljuje od notranje fiksne točke in pri vsakem obratu se pri enem polarnem kotu mestu malce više dvigne. Ko pride dovolj blizu druge fiksne točke, velika odbojna smer poskbi, da 'skoči' iz ravnine, v kateri je spirala in zaradi nelinearnosti pristane v notranjosti spirale. Potem se zgodba ponovi. Hausdorffova dimenzija tega atraktorja je okoli 2.01.

Sistem je dodelal Goodwin kot izboljšavo svojega cikla rasti. Nelinearen člen je nastal v povezavi s polno zaposlenostjo (v originalnem modelu je zpaoslenost podvržena zakonu naravne rasti).

7. Moore-Spiegelov sistem je tretji nizko-dimenzionalni dinamični sistem, ki ima kaos. Dan je z enačbami $\dot{x} = y$, $\dot{y} = z$, $\dot{z} = -x + (T - Rx + x^2)y - Tx$.

8. Model mednarodne trgovine je predstavljen kot sistem treh nelinearnih oscilatorjev, kar definira sistem na tridimenzionalnem torusu T^3. Ni jasno, ali je tudi tu prisoten kaos. Nekateri izreki kažejo na to, da bi lahko bil.

1.1 Podvajanje periode.

Oglejmo si primer Roesslerjevega atraktorja za parametre $a = b = 0.1$ in različne c. Izkaže se, da dobimo naslednje. Pri

(a) $c = 4$ imamo orbito s periodo 1,

(b) $c = 6$ imamo orbito s periodo 2,

(c) $c = 8.5$ imamo orbito s periodo 4,

(d) $c = 8.7$ imamo orbito s periodo 8,

(e) $c = 9$ kaotičen atraktor,

(f) $c = 12$ imamo orbito s periodo 3,

(g) $c = 12.6$ imamo orbito s periodo 6,

(h) $c = 13$ kaotičen atraktor,

(i) $c = 18$ kaotičen atraktor.

Podoben fenomen se pojavi pri Lorenzovem atraktorju.

1.2 Periodične orbite, limitni cikli in separatrični cikli.

Definicija 4.8. *Cikel ali periodična orbita avtonomnega sistema $\dot{x} = f(x)$ je vsaka sklenjena rešitev, ki ni točka. Periodična orbita je stabilna, če za vsak*

$\varepsilon > 0$ obstaja taka odprta okolica U te orbite znotraj ε-pasu okoli orbite, da se vse polorbite rešitev z začetnimi pogoji v U tudi same v U. Če periodična orbita ni stabilna, je nestabilna in če je stabilna in v gornji okolici gredo vse limite ko $t \to \infty$ proti orbiti, je ta asimptostko stabilna.

Opomba. V ravnini lahko gledamo tudi stabilnost z ene strani.
Podobno, kot v primeru stacionarnih točk lahko tudi v primeru orbit definiramo stabilno (nestabilno) mnogoterost kot množico točk, ki se približuje orbiti, ko gre $t \to \infty$ ($t \to -\infty$).

Primeri.
1. Sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2)\\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2)\\ \dot{z} &= z\end{aligned}$$

ima pri $z = 0$ orbito S^1, za $z \neq 0$ pa dobimo spirale. Ravnina $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ je invariantna za tok in sistem je oblike

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2)\\ \dot{\varphi} &= 1\\ \dot{z} &= z.\end{aligned}$$

Valj z radijem 1 in os z sta tudi invariantna za tok, saj je tu $\dot{r} = 0$. Za točko 0 je nestabilna mnogoterost v 0 je $\mathbb{R}^3$. Za krožnico je nestabilna mnogoterost valj, stabilna pa $\mathbb{R}^2$ (brez izhodišča). Enotski cilinder je privlačna množica za sistem. Periodična orbita S^1 je sedelna. Če sistem zožimo na ravninski del, je krožnica atraktor (in ω limitna množica).

Vsaka enostavno sklenjena krivulja razdeli ravnino na zunanjost in notranjost (to je del, ki je enostavno povezan). Notranjost je invariantna za tok in zato ima tok v notranjosti fiksno točko. Velja

Izrek 4.9. *(Navijanje). Če ima ena tokovnica G v zunanjosti limitnega cikla C ravninskega C^1 sistema cikel C za ω-limitno množico, potem to velja za vse zunanje tokovnice. Vsaka se vrti okoli G z naraščajočim t, tako da vsako pravokotnico na C seka neskončnokrat in časi presečišč t_n imajo limito ∞. Analogna rezultata dobimo za notranjost ali α-limitne množice.*

Dokaz. Skica. Naj bo U dovolj majhna okolica limitnega cikla, da v njej ni stacionarnih točk. Ker je C limitni cikel ene tokovnice in po definiciji sam tokovnica, ima vse točke regularne. Naj bo p pravokotni poltrak z roba v zunanjost in presečno točko P. Ker je vsaka točka stekališče tokovnice G, bo vsaka okolica točke P vsebovala neskončno presečišč Vemo tudi, da bodo bližnje točke imele podobne tangente, kot je tangenta cikla v P in ker ni stacionarnih točk, bodo ves tangente na poltraku kazale v isto smer. Zaporedje presečišč nam razdeli poltrak na zaporedje intervalov in okolico na zavoje polžkov. Pogledamo nek zavoj polžka in izberimo točko Q v njem. Tokovnica skozi Q lahko zapusti polžka le skozi naslednji interval. Če ostane v polžku, mora imeti limitno množico, in ker ni kritičnih točk, je limitna množica periodična orbita (netrivialno, zaenkrat brez dokaza). Ta pa bi morala v notranjosti vsebovati fiksno točko. Torej mora iz vsakega zavoja polžka. Ker ne more v naslednji zavoj preko tokovnice G, gre lahko le prek naslednjega intervala. Itd. Tako dobimo, da tudi taka tokovnica seka isti poltrak neskončnokrat. $\diamondsuit$

2. Sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)^{-1/2} \\ \dot{y} &= x + y(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

V polarnih koordinatah je sistem oblike

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^3 \sin r^{-1} \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{aligned}$$

Za vrednosti $r = (\pi k)^{-1}$ dobimo stacionarne krožnice. Za sode k je za $r < (\pi k)^{-1}$ izraz $\sin r^{-1} > 0$, za $r > (\pi k)^{-1}$ izraz $\sin r^{-1} < 0$, zato se notranjim tokovnicam radij povečuje, zunanjim pa zmanjšuje in dobimo stabilne krožnice. Pri tistih z lihimi indeksi pa je ravno obratno. Krožnice imajo stekališče c 0. Dulacov izrek pravi, da se to ne more zgoditi pri analitičnem sistemu.

Izrek 4.10. *(Dulac, 1923, korekten dokaz 1988) V vsakem omejenem ravninskem območju ima analitični avtonomni sistem kvečjemu končno limitnih ciklov.*

3. Hamiltonski sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x + x^2 \end{aligned}$$

je dan s Hamiltonsko funkcijo $H = y^2 - x^2/2 - x^3/3$ in zato so tokovnice nivojnice funkcije

$$y^2 - x^2/2 - x^3/3 = C.$$

Za $C = 0$ nivojnica ni regularna in dobimo Descartesov list, kjer je zanka ena tokovnica, izhodišče je stacionarna točka in repa sta tokovnici. Izhodišče je sedelna točka. Poleg tega je zanka v preseku stabilne in nestabilne mnogoterosti za 0. Imenuje se homoklinska orbita in skupaj s stacionarno točko sestavlja separatrični cikel.

4. Fizikalno nihalo ima enačbo nihanja $\ddot{x} + \sin x = 0$ in pripadajoč sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x \end{aligned}$$

je dan s Hamiltonsko funkcijo $H = T(y) + U(x)$, kjer je T kinetična, U pa potencialna energija. Kinetična energija je $y^2/2$, potencialna pa $U(x) = -\int_0^x -\sin s ds = 1-\cos x$ (gledamo $l = 1$; ta enačba je za kot in kotno hitrost). Za rezultat dobimo stacionarne točke na osi x in sicer ničle sinusa. Poglejmo si nivojnice, ki gredo skozi sedelne kritične točke, to so točke $((2k+1)\pi, 0)$. Na teh je $H = 2$. Dobimo enačbo $y^2/2+1-\cos x = 2$ oz. $y^2 = 2(1+\cos x)$. Vsak zgornji ali spodnji lok zase je tokovnica in sestavijo se v skladno orientirane cikle, stičišča pa so v sedelnih točkah. Začetek takega loka je α limitna množica, konec la ω. Taka orbita se imenuje heteroklinska.

Gornji sistem je poseben primer Hamiltonskih sistemov, ki jim pravimo Newtonovski sistemi in so oblike

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x) \end{aligned}$$

s Hamiltonsko funkcijo $H(x, y) = T(y) + U(x)$, kjer je Potencialna energija $T(y) = y^2/2$ in potencialna $U(x) = -\int_{x_0}^x f(s)ds$.

2. Poincaréjeva preslikava

Obravnavali smo primer presečišč orbite s premico, ki je bila ortogonalna na periodično rešitev. Zanima nas, kam se dana točka s premice preslika po enem zavoju, torej iščemo prvo naslednje presečišče. To preslikavo lahko definiramo na dovolj mahnji okolici presečišča poltraka in periodične rešitve. Pravimo ji Poincarejeva preslikava. Idejo lahko posplošimo na cikle v večrazsežnem prostoru, pri čemer moramo premice nadomestiti z ravninami. Paziti moramo tudi na to, da je čas, potreben za en zavoj, odvisen od začetne točke.

Izrek 4.11. *Naj bo x_0 točka na periodični rešitvi G s periodo T in Σ ravnina, ortogonalna na G v x_0. Obstaja $\delta > 0$, tako da je za vsak $x \in B(x_0, \delta) \cap \Sigma$ definirana C^1 funkcija $t : x \to t(x)$ z lastnostjo $\varphi_{t(x)} \in \Sigma$. Preslikavo*

$$P(x) = \varphi_{t(x)}x$$

imenujemo Poincarejeva preslikava.

Dokaz. Uporabimo izrek o implicitni funkciji za

$$F(t, x) = (\varphi_t(x) - x_0) \cdot f(x_0) = 0,$$

kjer je $\cdot$ skalarni produkt. Z zamenjavo časa $t \to -t$ vidimo, da je P difeomorfizem. ♢

Opomba. Poincaréjevo preslikavo lahko definiramo tudi za poljubne transverzalne mnogoterosti Σ kodimenzije 1. V tem primeru uporabimo dejstvo, da je (vsaj lokalno) taka podmnogoterost regularna ničelna nivojnica funkcije G. Enačba, ki jo nastavimo je potem

$$F(t, x', x_n) = G(\varphi_t(x)) = 0.$$

Ker je $F_t = \operatorname{grad} G(\varphi_t) f(\varphi_t) \neq 0$ po predpostavki transverzalnosti, lahko uporabimo izrek o implicitni funkciji.

Naj bo M invariantna mnogoterost dimenzije $m < n$ v $\mathbb{R}^n$ in x_0 točka na njej, ki leži na nekem ciklu. Naj bo Σ podprostor skozi x_0, pravokoten na M v x_0. Potem je čas $t(x)$ določen kot rešitev enačb

$$F_i(t, x) = (\varphi_t(x) - x_0) \cdot v_i = 0,\ i = 1, \ldots, m.$$

Opomba. Če je f analitična, sta tudi $t(x)$ in φ_t analitični in zato je P analitična.

Opomba. Poincaréjeva preslikava P ima x_0 za fiksno točko. Če je preslikava $P(x) - x_0$ skrčitev, potem bi si mislili, da je cikel privlačen, če pa je norma odvoda 1, je možnosti več. Fiksne točke P so presečišča s periodičnimi orbitami. Če je P analitična, potem se limitni cikli ne morejo stekati na periodični orbiti, sicer bi bila P identiteta in bi bile vse orbite periodične.

Če je p T-periodična točka, ki ni fiksna, potem ima $D\varphi_T(p)$ eno lastno vrednost 1 :

$$f(p) = f(\varphi_T(p)) = \frac{d}{dt}\varphi_t(p)|_{t=T} = \frac{d}{dt}\varphi_T \circ \varphi_t(p)|_{t=0} = D_x\varphi_T(f(p)).$$

Vektor $f(p)$ je lastni vektor $D_x\varphi_T$ za lastno vrednost 1. Naj bodo $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 1$ lastne vrednosti odvoda. Poglejmo, v kakšni zvezi so z lastnimi vrednostmi odvoda Poicarèjeve preslikave.

Naj bo S majhna transverzalna hiperravnina skozi p dana z enačbo

$$(\varphi_{t_x}(x) - p)f(p) = 0.$$

S to enačbo je definiran t_x za vsak x iz okolice p. Pri tem je $T = t_p$. Naj bo π pravokotna projekcija na S. Poincarejeva preslikava $P : S_\delta \to S_\varepsilon$ (definirana na okolici p!) je dana z

$$P(x') = \varphi_{t_x}(x'), x' \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Privzeti smemo, da je $f(p) = \lambda e_n$, kjer je e_n n-ti bazni vektor in naj bo $x = (x', x_n)$ ustrezni koordinatni zapis $\mathbb{R}^n$. Preslikava P je potem

$$P(x') = \varphi'_{t_x}(x');$$

z oznako φ' smo označili samo prvih $n-1$ komponent; zadnja je po definiciji t_x vedno enaka 0. Odvod P po x' je enak

$$D_{x'}P(p) = D_{x'}\varphi'_{t_p}(p) + D_t\varphi'_{t_p}(p) \cdot D_{x'}t_p = A.$$

Ker je $f(p) = \lambda e_n$, je $D_t\varphi'_{t_p} = 0$, zato nam ostane le prvi del odvoda. Ker je 1 lastna vrednost, je matrika celotnega odvoda oblike

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ * & 1 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je za študij vedenja v bližini periodične orbite pomembna le smer, ki je transverzalna na orbito. Če so lastne vrednosti A po absolutni vrednosti pod 1, je cikel privlačen.

3. Poincaré-Bendixsonova teorija v $\mathbb{R}^2$

Naj bo f vektorsko polje v ravnini. Recimo, da na neki odprti množici U nima ničel (pravimo, da so točke U regularne). Potem obstaja skozi vsako točko iz U krivulja, ki je ortogonalna na f (obstoj Lagrangevega množitelja).

Lema 4.12. *Naj bo f na U regularna, $x_0 \in U$ točka in lok $\Sigma \subset U$ skozi x_0 transverzalen na f. Naj bo $x_n = \varphi_{t_n}(x_0)$ zaporedje točk z lastnostjo, da je $x_i \in \Sigma$ in zaporedje t_i monotono. Potem je zaporedje x_i na Σ monotono.*

Dokaz. Omejili se bomo na primer, ko je zaporedje časov naraščajoče. Naj bo $x_1 = x_0$. Potem imamo periodično situacijo. Denimo, da ni tako. Ideja dokaza je podobna tisti z polžki. Del tokovnice med x_0 in x_1 skupaj z delom loka Σ med tema točkama razdeli območje na zunanjost U^+ in notranjost U^-. Naj bo x_1 nad x_0. Poglejmo, kako je z naslednjim zavojem toka. Recimo, da tok ostane v zunanjosti. Potem bo naslednje presečišče nad x_1, kar je v redu. Če naj gre tok v notranjost, mora iti nujno skozi del loka, ampak to pomeni, da mora tok vzdolž loka spremeniti znak, kar ne drži po predpostavki, da na U ni singularnih točk in je lok transverzalen. Enak sklep velja za točke v obrnjenem vrsten redu in za negativne čase. $\diamondsuit$

Sledi spisek trditev, ki jih bomo formulirali za ω limitne množice, veljajo pa ravno tako za α limitne.

1. <u>ω-limitna množica in transverzalni lok imata največ eno presečišče.</u> Naj bo $y \in \omega(x) \cap \Sigma$ poljubna točka. Recimo, da je regularna za f. Zaporedje presečnih točk $\varphi_t(x) \cap \Sigma$ na Σ je monotono zato ima na Σ eno samo limito. Zato se transverzalni lok Σ in $\omega(x)$ sekata v eni točki. Če bi se v dveh, bi imeli točki y_1 in y_2 in monotono zaporedje t_n, kjer bi se členi za sode n stekali k y_1, za lihe pa k y_2. To pa je v nasprotju z monotonostjo.

2. <u>Periodična orbita.</u> Recimo, da se tokovnica $\varphi_t^+(x)$ in $\omega(x)$ sekata v y in da x ni stacionarna točka. Potem je v $\omega(x)$ cela tokovnica $\varphi_t^+(y) = G^+(y)$. Zaradi invariantnisti je $G(x) = G(y)$ in $\omega(x) = \omega(y)$. Ker x ni stacionarna, tudi y ni stacionarna, zato obstaja lok Σ skozi y, ki je transverzalen na f. Če y peljemo s tokom, mora sekati Σ in to kvečjemu v eni točki, saj je y iz ω-limitne množice, torej v y. Zato je orbita $G(y) = G(x)$ periodična in ker je periodična, je enaka svoji omega limitni množici.

3. Regularna minimalna množica je periodična orbita. Naj bo minimalna C kompaktna (regularna) množica, ki je invariantna za pozitiven tok. Vzemimo $x \in C$. Regularna pomeni, da na njej ni fiksnih točk. Množica C je enaka zaprtju pozitivne polorbite x, torej $\varphi_t^+(x) \cup \omega(x) = C$. Ker je $\omega(x)$ sama invariantna in kompaktna, vsebuje pozitivno polorbito in $C = \omega x \supset \varphi_t^+(x)$. Ker imata ω-limitna množica in tokovnica neprazen presek, je po točki (2) C periodična orbita.

4. Povezana omega limitna množica, ki vsebuje cikel, nima drugih točk. Naj bo $\omega(x)$ povezana in naj vsebuje regularno periodično orbito $G(y)$. Recimo, da množici nista enaki in torej obstaja zaporedje $z_k \in \omega(x) \setminus G(y)$, ki konvergira k $y_1 \in G(y)$. Natančneje, za y_1 lahko izberemo robno točko množice $\omega(x) \setminus G(y)$.

Naj bo Σ lok skozi y_1 transverzalen na $G(y)$. Potem obstaja Poincaréjeva preslikava $P(x)$ in časovna funkcija $t(x)$ z lastnostjo $\varphi_{t(z_k)}(z_k) \in \Sigma$ za z_k dovolj blizu y_1. Ker pa ima lahko Σ z limitno množico samo eno presečišče in to je y_1, mora biti $\varphi_{t(z)}(z) = y_1$, torej leži na tokovnici, kar je v nasprotju s predpostavko, da z ni bila v $G(y)$.

Izrek 4.13. *(Poincaré-Bendixson 1) Če je $\omega(x)$ brez fiksnih točk, kompaktna in neprazna, je unija periodičnih orbit.*

Dokaz. Naj bo $y \in \omega(x)$ in $z \in \omega(y) \subset \omega(x)$. Vzemimo transverzalni lok Σ na z. Ker je $\varphi_t(y)$ v $\omega(x)$, lahko seka Σ le v z, po drugi strani pa obstaja tako monotono naraščajoče zaporedje t_n, da je $\varphi_{t_n}(y) \cap \Sigma \neq \emptyset$. To zaporedje pa mora biti stacionarno in $\varphi_{t_n}(y) = z$, torej je $\omega(y)$ periodična orbita. Tudi $\omega(x) \cap \Sigma = z$. Množica $\omega(x)$ torej vsebuje enostavno sklenjeno krivuljo. $\diamondsuit$

Izrek 4.14. *(Poincaré-Bendixson 2) Naj bo K kompaktna množica brez singularnih točk polja f. Naj bo G^+ tokovnica, ki je v K. Potem je v K periodična orbita (ki je minimalna podmnožica v $\omega(G)$) in po izreku 4.9. se tokovnica G navija okoli nje.*

Lema 4.15. *Naj bo $\omega(x)$ kompaktna in naj vsebuje različni fiksni točki $x_\pm$. Potem obstaja kvečjemu ena orbita v $\omega(x)$, ki ima x_+ za končno in x_- začetno limitno točko.*

Dokaz. (Slika!!!) Recimo, da obstajata dve taki orbiti $G(y_i)$, $i = 1, 2$. Skupaj s tema dvema točkama naredita enostavno sklenjeno krivuljo, ki območje razdeli na notranjost in zunanjost. Vzemimo transverzalna loka Σ_i skozi y_i in pripadajoči Poincaréjevi preslikavi in privzemimo, da je x v notranjosti. Potem je v notranjosti cela orbita in naj bosta $z_i = P_i(x)$ presečni točki. Del tokovnice med točkama z_i in dela lokov na Σ_i razdelijo notranjost na dva dela. Zaradi usmerjenosti tokovnic mora tokovnica $G(x)$ ostati v eni polovici, kar je v nasprotju z definicijo limitne množice. $\diamondsuit$

Izrek 4.16. *(Poincaré-Bendixson 3) Naj bo $U \subset \mathbb{R}^2$ odprta in $f \in C^1(U)$. Izberimo $x \in U$ in privzemimo, $\omega(x)$ povezana neprazna kompaktna množica, ki vsebuje končno fiksnih točk. Potem imamo naslednje možnosti.*

(a) $\omega(x)$ je fiksna točka.

(b) $\omega(x)$ je periodična orbita.

(c) $\omega(x)$ je sestavljena iz končno fiksnih točk in lokov, ki imajo te fiksne točke za začetne oz. končne limitne točke.

Če nima fiksnih točk, je po prejšnjih ugotovitvah regularna orbita. Če ima samo fiksne točke, ima zaradi povezanosti lahko samo eno. Ostane še zadnji primer. Vzemimo poljubno regularno točko y in poglejmo njeno orbito. Trdimo, da ima v začetni oz. končni limitni množici samo eno točko in ta je fiksna. Zato zadošča pokazati, da limitna množica $\omega(y)$ nima regularnih točk. Recimo, da je v limitni množici $\omega(y)$ regularna točka z. Naj bo Σ transverzalen lok skozi to točko. Pošljimo y s tokom naprej. Ker je z limitna množica, mora tokovnica neskončnokrat sekati Σ v okolici y, po drugi strani pa vemo, da ima limitna množica kvečjemu eno presečišče, zato je orbita $G(y)$ periodična. Potem pa bi morala biti enaka svoji limitni množici, kar ni mogoče, če limitna množica vsebuje fiksne točke. $\diamondsuit$

Primer. Vektorsko polje

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + x^2 - x(y - 1 + 2x^2)/4 \\ \dot{y} &= -2(1+y)x \end{aligned}$$

ima invariantne množice $y = -1$, $y = 1 - 2x^2$, fiksne točke so $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$ in $(2,-1)$. Liejev odvod funkcije $H(x,y) = x^2(1+y) + y^2/2$ vzdolž tokovnic je nenegativen na množici $H \leq 1/2$, ki je ravno omejeno območje med parabolo in premico. Linearizacija v okolici fiksnih točk:

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 1/4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta je nestabilni vrtinec.

$$Df(-1,-1) = \begin{bmatrix} -3 & 5/4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Ta je sedlo.

$$Df(1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 3/4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ta je sedlo.

$$Df(2,-1) = \begin{bmatrix} -3/2 & 1/1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Ta je stabilni vozel.

Izrek 4.17. *Naj bo $f = (f_1, f_2)$ ravninsko polje z ničelno divergenco. Potem obstaja taka funkcija g, da je $f = (g_{x_2}, -g_{x_1})$ in vzdolž vsake orbite $\varphi_t(x)$ je g konstanta.*

Z drugimi besedami: $\dot{x} = (f_1, f_2)$ ima prvi integral g.

Dokaz. Definirajmo $g(x_1, x_2) := \int f_1(x_1, x_2)dx_2 + h_1(x_1)$. S tem smo zadostili prvemu pogoju. Funkcijo h_1 določimo tako, da je zadoščeno še drugemu:

$$\begin{aligned} g_{x_1}(x_1, x_2) &= \int \frac{d}{dx_1} f_1(x_1, x_2)dx_2 + h_1'(x_1) = \\ &= \int -\frac{d}{dx_2} f_2(x_1, x_2)dx_2 + h_1'(x_1) = \\ &= -f_2(x_1, x_2) + h_2(x_1) + h_1'(x_1). \end{aligned}$$

Z odvajanjem po parametru t dobimo

$$\frac{d}{dt} g(\varphi_t(x)) = \mathrm{grad}(g) \cdot f = (-f_2, f_1)(f_1, f_2) = 0,$$

zato je g konstanta vzdolž tokovnic. $\diamondsuit$

Izrek 4.18. *(Bendixsonov kriterij). Denimo, da je na enostavno povezanem območju U $\mathrm{div}\, f$ konstantnega znaka (in ni identično enaka 0). Potem znotraj U ni nobene regularne periodične orbite.*

Dokaz. Naj bo divergenca pozitivna in naj obstaja periodična orbita. Potem je za nek t_0 in x_0 $t \mapsto \varphi_t(x_0), t \in [0, t_0]$ parametrizacija sklenjene Jordanove krivulje $\gamma = \partial D$. Integral polja, pravokotnega na f, vzdolž orbite je enak

$$\int_0^{t_0} (-f_2, f_1)(\varphi_t(x_0)) \cdot \frac{d}{dt}\varphi_t(x_0)dt = 0,$$

po drugi strani pa je po Stokesovem izreku ta integral enak

$$\int_D \mathrm{rot}(-f_2, f_1)(\varphi_t(x_0))(0,0,1)dP = -\int_D \mathrm{div}(f_1, f_2)(\varphi_t(x_0))dP > 0.$$

5. Diskretni dinamični sistemi

1. Uvodni primeri

1.1 Zajci iz Pise. Leonardo iz Pise je študiral naslednji problem. Recimo, da imamo zajce, ki se množijo tako. Vsak mesec skotijo en par zajcev in na novo skoteni par skoti nov par mesec dni po rojstvu. Koliko se jih skoti vsak mesec? Koliko jih je vsak mesec? V biologiji je več primerov te vrste. Eden je tudi vegetativno razmnoževanje zvončkov. Vsako leto se čebulica deli (na dve). Naslednje leto se deli stara čebulica, nova pa eno leto počaka itd (Vir: Jože Bavcon, Botanični vrt Ljubljana). Napišimo razpredelnico.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

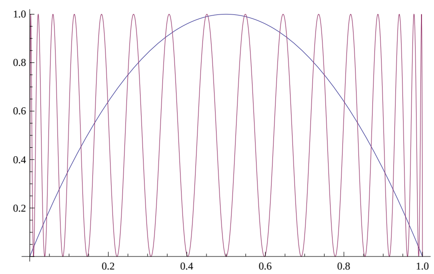
Mimogrede, očetu Leonarda is Pise je bilo ime Bonacci in Leonarda so pogosto klicali Filius Bonacci ali krajše Fibonacci. Za število na novo skotenih dobimo rekurzivno formulo

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}.$$

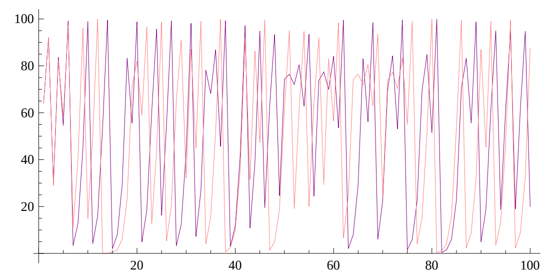
To je primer linearne diferenčne enačbe. Vsako linearno diferenčno enačbo rešujemo z nastavkom $x_n = a^n$. Vstavimo v enačbo in dobimo karakteristični polinom. Njegove ničle nam dajo rešitve, če pa je a večkratna, so rešitve, ki jih ta ničla generira $a^n, na^n, n^2a^n....$ Njihove linearne kombinacije sestavljajo prostor vseh rešitev sistema.

2. Logistična enačba

Za uvod si bomo pogledali primer realne dinamike za logitstično funkcijo $f(x) = 4x(1-x)$. To je surjekcija $[0,1]$ nase. Za začetek si poglejmo nekaj grafov iterirank.



Slika 5.1: Grafa f in f_5



Slika 5.2: Kosoma linearni krivulji, ki povezujeta prvih 100 iteratov števil 0.2 in 0.201

Majhna začetna napaka rezultira v velikih razlikah. Ujemanje na prvih petih korakih. Povečanje natančnosti za faktor 10^{15} ima za posledico ujemanje na prvih 50 korakih. Grafa razlik s ta prikazana na sliki 5.4. Analizirajmo $f_m(x) = mx(1-x)$ za različne vrednosti m. Recimo, da fiksiramo začetno točko in sprostimo m. Naredimo nekaj sto iteracij in pogledamo rezultat. Vidimo spodnjo sliko 5.5. (Imenuje se Feigenbaumov atraktor. Njegova Hausdorffova dimenzija je okoli 0.538.)

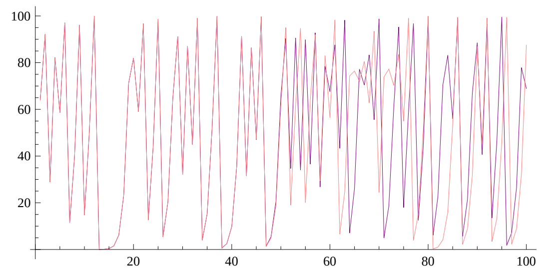
Opazimo, da se pri določenih vrednostih parametra pojavi razvejišče (v obliki vilic) - bifurkacija. To nas napelje na misel, da se morajo nekje pojaviti periodične točke. Fiksne točke so

$$f_m(x) = x,\ x_1 = 0 \text{ in } x_2 = (m-1)/m = p.$$

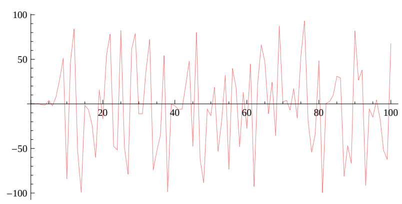
Odvod f je $f_m'(x) = m - 2mx$ zato je

$$f_m'(0) = m,\ \ f_m'((m-1)/m) = m - 2(m-1) = 2 - m.$$

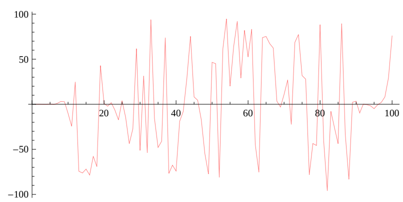
Točka je odbojna, če je odvod po absolutni vrednosti strogo nad m, privlačna, če je strogo pod 1 in nevtralna, če je 1. Točka 1 se vedno preslika v točko 0.



Slika 5.3: Kosoma linearni krivulji, ki povezujeta prvih 100 iteratov števil 0.2 in $0.2 + 10^{-16}$

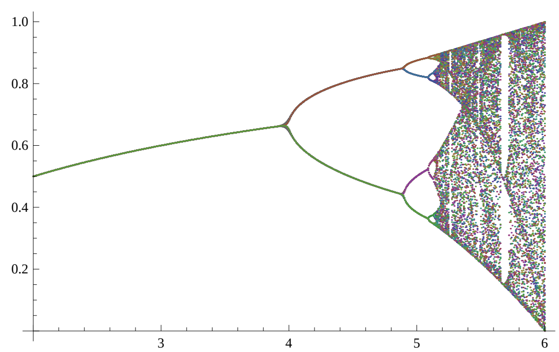


(a) napaka 10^{-3}



(b) napaka 10^{-16}

Slika 5.4: Razlika v orbitah



Slika 5.5: Bifurkacija za $x = 0.6$, $n = 300$ in $m \in [2, 4]$.

Maksimum za f_m na $[0, 1]$ je $m/4$. Zato je za $m \leq 4$ interval $[0, 1]$ invarianten. Izračunajmo če

$$f_m(x) - p = (1 - mx)(x - p) \text{ in } f_m^2(x) - p = (x - p)(1 - mx)(1 - mf_m(x)).$$

Drugo dobimo iz prve, če v prvo vstavimo $x = f_m(x)$. Omejimo se na pozitivne m.

1. Za $m < 1$ je prva točka privlačna, druga pa odbojna (in na negativni strani osi x) in zato pričakujemo, da bodo vsi iterati med

$$[(m-1)/m, 1-(m-1)/m = 1/m]$$

šli proti 0, točka $1/m$ gre v $(m-1)/m$, ostali pa v $-\infty$. Prepričai se, da ima 0 v prasliki samo 1, $(m-1)/m$ pa $1/m$. (Slika).
2. Za $m = 1$ dobimo eno dvojno ničlo in ta je nevtralna. Narišemo sliko in vidimo, da je na pozitivni strani privlačna, na negativni pa odbojna. Desno od 1 gredo iterati v $-\infty$.
3. Za $1 < m < 3$ je 0 odbojna in druga točka privlačna. Poglejmo praslike odbojnih fiksnih točk. V 0 se preslikata 0 in 1, 1 pa za $m < 4$ nima nobene praslike. (Slika).
4. Za $m = 3$ je druga točka nevtralna. Iterati za $x \in (0, 1)$ oscilirajo okoli nje in k njen konvergirajo. Tiste točke, kjer je f negativna, gredo v $-\infty$.
5. Za $3 < m < 4$ odbojna točka 0 ima za predorbito le 1, odbojna točka $(m-1)/m$ pa ima v prvi prasliki dve točki, v drugi 3, v četrti $4+1$ itd. Dobimo torej veliko točk, ki se preslikajo v eno od odbojnih točk. Poiščimo še periodične orbite reda 2. To so rešitve enačbe $f_m^2 = id$, ki niso fiksne točke, fiksni točki pa sta 0 in $1 - 1/m$. Dobimo rešitvi

$$p_+ = \frac{m + m^2 - m\sqrt{-3-2m+m^2}}{2m^2}$$

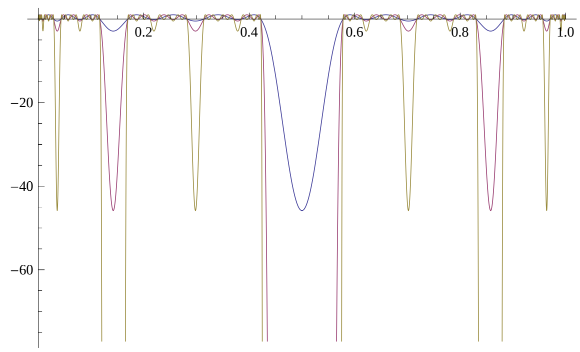
$$p_- = \frac{m + m^2 + m\sqrt{-3-2m+m^2}}{2m^2}.$$

Ti dve se preslikata ena v drugo. Izračunajmo še odvod drugega iterata v eno od teh dveh točk:

$$(f_m^2)'(p_\pm) = f_m'(p_\mp) f_m'(p_\pm) = 4 + 2m - m^2,$$

kar pove, da je orbita privlačna za $3 < m < \sqrt{6}$, saj je rešitev neenačbe $|4 + 2m - m^2| < 1$ za pozitivne m interval $(3, 1+\sqrt{6})$. Parameter $1+\sqrt{6}$ je kritičen, za večje se pojavi perioda reda 4 itd. Podobno kot pri zveznih dinamičnih sistemih opazimo, da podvajanje period vodi v kaos.
6. Za $m = 4$ sta obe točki odbojni. Točka 1 ima v prasliki 1/2, ta ima v prasliki spet dve točki itd. Dobimo neskončno točk, ki se sčasoma preslikajo v 0. Ostale nikamor ne konvergirajo.

7. Za $m > 4$ gredo vse točke, ki niso v predorbitah odbojnih, v $-\infty$. Zanimalo nas bo, katere sploh ostanejo. Na sliki 5.6 so prikazani iterati. Vidimo, da se dogaja nekaj podobnega konstrukciji Cantorjeve množice.



Slika 5.6: 5.,6.,7. iterati za $m = 4.1$

Izrek 5.2. *Naj bo $m > 4$. Množica*

$$\Lambda_m = \{x, f_m^n(x) \in I,\ n \geq 0\}$$

je Cantorjeva.

3. Osnovne definicije

Definicija stabilne in nestabilne mnogoterosti je enaka, le da moramo za nestabilno mnogoterost privzeti, da je f obrnljiva. Izraz orbita pomeni

$$G^+(x) = \{f^n(x), n \geq 0\},$$

predorbita je

$$G^-(x) = \{z = f^n(x), n \geq 0\}.$$

Točka x je periodična, če je $f^n(x) = x$ za nek $n > 0$ in najmanjši tak n imenujemo stopnja periode. Definicija invariance je enaka, prav tako definicija minimalne invariantne množice in začetne in končne limitne množice. Velja izrek Hartman–Grobman za točke, ki nimajo lastnih vrednosti odvoda na S^1.

Obstoj nekaterih period implicira obstoj vseh ostalih.

Izrek 5.3. *(Šarkovski) Naj bo $f : I \to I$ zvezna preslikava intervala nas in naj ima orbito s periodo 3. Potem ima orbite vseh period.*

4. Eksponent Ljapunova

Občutljivost na začetno napako meri eksponent Ljapunova. Motivacija je naslednje razmišljanje. Recimo, da je dana začetna napaka $n(0)$. Začetni približek je $x(0)$. Poglejmo orbiti števil $x(0)$ in $\tilde{x} = x(0) + n(0)$, označimo razliki z

$$n(k) = \tilde{x}(k) - x(k)$$

in izračunajmo faktor, za katerega se spremeni napaka po k korakih:

$$\left|\frac{n(k)}{n(0)}\right| = \left|\frac{n(k)}{n(k-1)}\right| \dots \left|\frac{n(1)}{n(0)}\right|.$$

Poskusimo ga primerjati z geometrijskim zaporedjem. Pri linearni funkciji $y = cx$ se zaradi linarnosti napaka vsakič pomnoži s c in kvocient je $n(k)/n(0) = c^k$. Konstanto dobimo z logaritmiranjem in limito

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \lim_{n(0) \to 0} \frac{1}{k} \log \left|\frac{n(k)}{n(0)}\right|.$$

Če je λ negativna, je $c < 1$, torej je preslikava skrčitev in napaka gre proti 0. Če je $\lambda = 0$ ne moremo zaenkrat ničesar reči, za $\lambda > 0$, pa se napaka povečuje. Definicijo lahko posplošimo tudi na zvezne čase:

$$\lambda = \lim_{t \to \infty} \lim_{n(0) \to \infty} \frac{1}{t} (\log |n(t)| - \log |n(0)|).$$

Iz gornje formule sledi, da je za dovolj majhne začetne približke kvocient približno enak odvodu

$$\frac{n(k)}{n(k-1)} = \frac{\tilde{x}(k) - x(k)}{\tilde{x}(k-1) - x(k-1)} = \frac{f(\tilde{x}(k-1)) - f(x(k-1))}{\tilde{x}(k-1) - x(k-1)} \doteq f'(x(k-1)).$$

Zato je

$$\lambda = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{1}^{k} \log |f'(x(j-1))|.$$

Definicija 5.4. *Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija razreda C^1. Za vsako točko x definirajmo eksponent Ljapunova z*

$$\lambda(x) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log |(f^n)'(x)| = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n-1} \log |f'(f^j(x))|.$$

Primeri.
1. Naj bo $T(x) = 1 - |2x - 1|$ na $[0,1]$ šotorska preslikava (tent map). Lomljena linearna, ki povezuje točke $(0,0)$, $(0.5,1)$, $(1,0)$. Točke, kjer iterati niso odvedljivi, sestavljajo števno množico in so inverzni iterati 0.5, drugje pa je odvod enak 2 po absolutni vrednosti. Zato je za točke iz komplementa eksponent Ljapunova enak $\log 2$.
2. Naj bo f_m logistična funkcija in $m > 2 + \sqrt{5}$. Za te m je $|f_m'(x)| > c > 1$, če je $mx(1-x) \leq 1$. Zato je na Λ_m koeficient Ljapunova navzdol omejen z

$$\lambda(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n-1} \log |f'(f^j(x))| \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n-1} \log c = \log c.$$

5. Smalova podkev

Podobno kot v eni spremenljivki pri polinomskih preslikavah dobimo kaotično vedenje na Cantorjevi množici, lahko tudi v dimenziji dva skonstruiramo preslikavo, ki ima za kompaktno invariantno množico kartezični produkt Cantorjevih množic. Imenuje se Smalova konjska podkev. Podoben primer je pekarska preslikava. Definicija Smalove podkve:

$$S(x,y) = \begin{cases} (3x, y/3) & \text{for } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ (3x-2, (y+2)/3) & \text{for } \frac{2}{3} \leq x < 1. \end{cases}$$

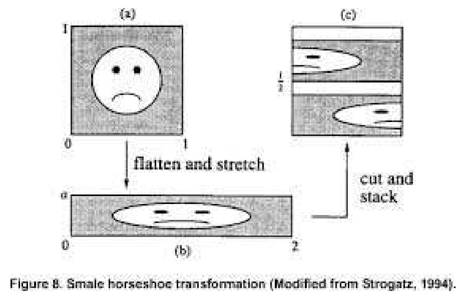
Definicija pekarskih preslikav je spodaj. Prva predstavlja razteg s prepogibanjem, druga pa razteg, rezanje in polaganje drugega dela na prvega.

$$S_{\text{pekarska-zavita}}(x,y) = \begin{cases} (2x, y/2) & \text{for } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ (2-2x, 1-y/2) & \text{for } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

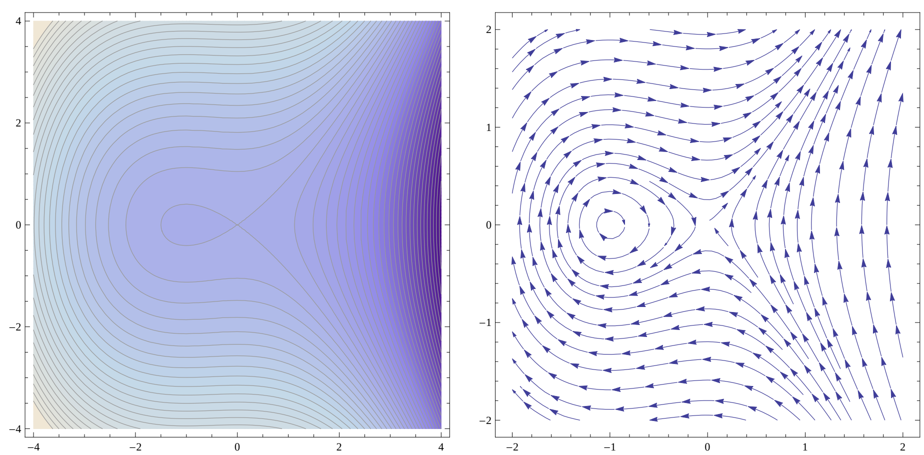
$$S_{\text{pekarska-prerezana}}(x,y) = \left(2x - \lfloor 2x \rfloor\ ,\ \frac{y + \lfloor 2y \rfloor}{2}\right).$$

Izkaže se, da so vse ravninske preslikave, ki imajo "pozitivno entropijo", konjugirane Smalovi podkvi. Smalovo podkev dobimo npr. pri homoklinskih (transverzalnih) orbitah. Imeli smo že primer sistema, ki je imel v 0 sedlo in neprazen presek stabilne in nestabilne mnogoterosti, ki je bil homoklinska orbita:

$$\vec{f}(\vec{x}) = [x_2, x_1 + x_1^2]^T.$$



Slika 5.7: Prerezana pekarska preslikava



Slika 5.8: Homoklinska orbita

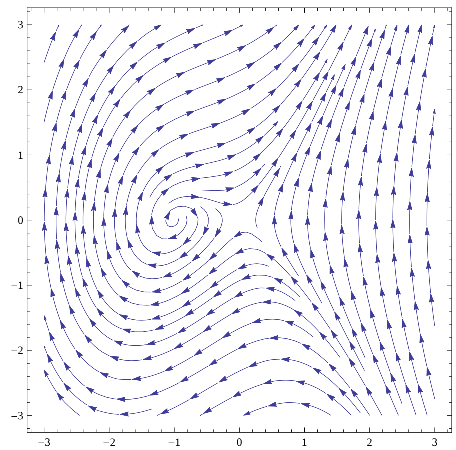
Ta presek je bil tangencialen. Dobili smo homoklinsko zanko.

V diskretnem primeru pa se stabilna in nestabilna mnogoterost lahko sekata še v kaki dodatni točki, kar se v gladkem ne more zgoditi.

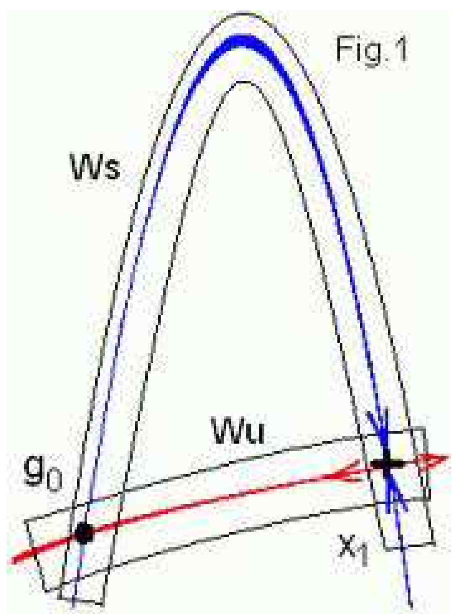
Denimo, da imamo difeomorfizem $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ s hiperbolično fiksno točko 0 in privzemimo, da se stabilna in nestabilna mnogoterost netangencialno sekata v točki p. (To se v zveznem primeru ne more zgoditi, ker sta obe mnogoterosti sestavljeni iz tokovnic in če bi se transverzalno 'sekali', bi moralo to biti v fiksni točki). To naredi npr. Cremonska preslikava

$$S_{\text{Cremona}}(x, y) = (3(x + (x - y)^2), (y + (x - y)^2)/3)$$

Imamo slavni izrek



Slika 5.9: Perturbacija homoklinske orbite

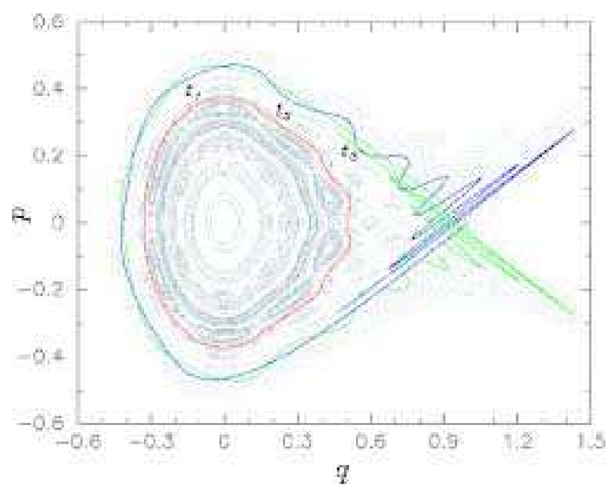


Slika 5.10: Transverzalna homoklinska orbita

Izrek 5.5. *(Smale - Birkhoff) Naj bo* $U \subset \mathbb{R}^2$ *okolica* 0 *in* $f : U \to \mathbb{R}^2$ *vložitev, ki ima* 0 *za hiperbolično fiksno točko s transverzalno homoklinsko točko. Potem obstaja podkev v vsaki poljubno majhni okolici* 0.

Dokaz. Če imamo homoklinsko transverzalno točko, potem je zaradi invariantnosti to res tudi za vsako točko njene orbite (Ker je f difeomorfizem, homoklinska točka nima končne orbite, ki bi vsebovala 0.) Če narišemo, to izgleda kot da se stabilna in nestabilna mnogoterost neskončnokrat prepleteta. Ko gremo proti 0 po stabilni mnogoterosti, se razdalje med sosednjima točkama orbite krajšajo, zanke med njima pa se daljšajo in potujejo vzdolž nestabilne mnogoterosti in se za dovolj pozne iterate vrnejo v okolico ničle, kjer se zgodba ponovi. Če si izberemo majhen kvadrat okoli 0 in pogledamo njegove slike, vidimo, da se pojavi podkev. $\diamondsuit$

Te preplete je prvi opazil Poincaré pri raziskovanju problema treh teles in to je bilo prvo znamenje, da je v sončnem sistemu lahko tudi kaj kaotičnega.



Slika 5.11: Smalova podkev

In še en slavni izrek.

Izrek 5.6. *Če ima ravninski dinamični sistem pozitivno topološko entropijo, potem vsa entropija pride iz podkev.*

Entropija je - podobno, kot v fiziki - mera za neurejenost.

(Slika)

6. Iteracija v kompleksnem

1. Klasifikacija fiksnih točk

Logistično preslikavo lahko gledamo tudi kot preslikavo iz Riemannove sfere nase. V tem primeru moramo obravnavati tudi točko ∞. Napišimo najprej nekaj osnovnih pojmov.

Naj bo z_0 fiksna točka holomorfne funkcije f in $\lambda = f'(z_0)$. Glede na odvod delimo točke na

(a) privlačne, če je $|\lambda| < 1$; če je $\lambda = 0$, imenujemo točko superprivlačno,

(b) odbojne, če je $|\lambda| > 1$,

(c) racionalno nevtralne: λ je n-ti koren enote za nek n,

(d) iracionalno nevtralne: $|\lambda| = 1$ ni n-ti koren enote za nek n.

Iterate bomo označevali z f^n.

Če je z_0 privlačna fiksna točka, je na neki okolici z_0 skrčitev in zato f^n na tej okolici konvergira enakomerno k z_0. *Območje privlačnosti* točke z_0, $A(z_0)$, je množica vseh točk, katerih iterati so definirani za vse $n \geq 1$ in konvergirajo k z_0. Zato za majhne ε območje $A(z_0)$ sovpada z unijo inverznih iteratov, $f^{-n}(\Delta(z_0, \varepsilon))$, zato je odprta. Povezana komponenta, ki vsebuje z_0 je *območje takojšnje privlačnosti* in ga označimo z $A^*(z_0)$.

Primer. Newtonova metoda za polinom P nam da iteracijsko funkcijo

$$f(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}.$$

Fiksni točki sta ravno ničli, odvod je

$$f'(z) = 1 - \frac{P'^2(z) - P(z)P''(z)}{P'^2(z)}$$

Takoj vidimo, da je v ničlah polinoma odvod enak 0 in sta zato superprivlačni. Naj bo P monični polinom z ničlama a in b. Točka neskončno je tudi fiksna točka,

$$g(z) = \frac{1}{f(z^{-1})} = (2z - (a+b)z^2)\sum_0^\infty (abz^2)^k,$$

in sicer odbojna, saj je $g'(0) = 2$. Naj bo φ Möbiusova transformacija, ki preslika a v 0, b v ∞ in ∞ v 1 :

$$\varphi(z) = \frac{z-a}{z-b} \text{ in } \varphi^{-1}(z) = \frac{bz-a}{z-a}.$$

Kompozitum

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = \frac{(bz-a)^2 - ab(z-1)^2}{2(bz-a)(z-1) - (a+b)(z-1)^2} = \frac{(bz^2-a)(b-a)}{(z^2-1)(b-a)} = \varphi^{-1}(z^2).$$

Preslikava je konjugirana z^2 in ima zato enako dinamiko. Točki 0 in ∞ sta superprivlačni in

$$A(\infty) = \{|z| > 1\}, \;\; A(0) = \{|z| < 1\}.$$

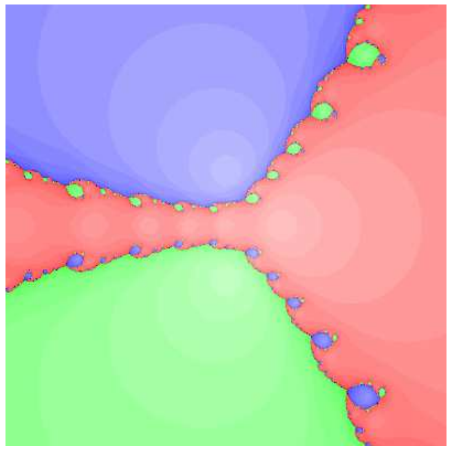
Enotska krožnica se s preslikavo $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ preslika sama nase.

To pomeni, da se praslika enotske krožnice preslika sama nase. Izračunajmo, katera krožnica ali premica gre s φ na enotsko krožnico. Preslikava φ preslika ∞ v 1, sredino $(a+b)/2$ v -1, v i pa se preslika $\alpha = 1/2((a+b) - i(a-b))$. Ker je zveznica med α in sredino pravokotna na vektor $b-a$, ležijo vse te točke na premici, ki je simetrala zveznice med a in b. V originalnem primeru sta uztrezni območji privlačnosti kar odprti polravnini na vsaki strani simetrale. $\diamondsuit$

Newtonova metoda za polinom $p(z) = (z-1)(z^2+1)$ da popolnoma drugačno sliko.

Definicija 6.2. *Funkcija $f\colon U \to U$ je konformna konjugiranka funkcije $g : V \to V$ če je $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ za neko konformno preslikavo $\varphi\colon U \to V$. Isti enačbi, napisani v obliki $\varphi \circ f = g \circ \varphi$, pravimo Schröderjeva enačba.*

Preslikavi lahko razumemo kot eno preslikavo v različnih koordinatnih sistemih. Tudi iteriranke so konjugirane.



Slika 6.1: Newtonova metoda za $(z-1)(z^2+1)$

Recimo, da je funkcija f oblike

$$f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + a(z - z_0)^p + ...$$

za nek $p \geq 2$. V okolici z_0 je se funkcija vede kot $g(\zeta) = \lambda\zeta$ okoli 0, če je $\lambda \neq 0$ in kot $g(\zeta) = a\zeta^p$, če je $\lambda = 0$ in $a \neq 0$. Naravno vprašanje je, ali sta f in g konjugirani. Izkaže se, da je obstoj odvisen od λ. Pokazali bomo, da konjugiranje obstaja v primeru odbojnih in privlačnih fiksnih točk.

Če je $\lambda \neq 0$ in ni koren enote, potem je konjugiranje enolično do skalarja natanko. Res, recimo, da sta konjugiranji dve, φ_1 in φ_2. Potem je

$$\varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} = \lambda z = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}$$

in zato

$$\varphi_1^{-1} \circ \lambda z \circ \varphi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \lambda z \circ \varphi_2$$

oziroma

$$\lambda z = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})^{-1} \circ \lambda z \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}.$$

za enoličnost do faktorja natanko zadošča dokazati, da je $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ kvečjemu množenje s skalarjem. Naj bo $\varphi = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ in vstavimo to v gornjo enačbo, ki jo prepišemo v obliko $\lambda\varphi(z) = \varphi(\lambda z)$. Iz razvoja v vrsto dobimo

$$\sum_1^\infty \lambda a_i z^i = \sum_1^\infty a_i \lambda^i z^i.$$

Enačimo koeficiente in dobimo

$$a_n\lambda^n = a_n\lambda.$$

Če λ ni koren enote, potem je pogoj $a_n = 0$ za $n \geq 2$ potreben pogoj za rešitev gornje enačbe. Podobno razmišljamo v primeru $\lambda = 0$. Funkcija ima obliko

$$f(z) = z_0 + a(z - z_0)^p + ...$$

za nek $p \geq 2$, $a \neq 0$. V tem primeru imamo zvezo

$$a(\sum_1^\infty a_i z^i)^p = \sum_1^\infty a_i(az^p)^i.$$

Člena pri z^p se ujemata.

$$\begin{aligned}
z^p &: \ a a_1^p = a_1 a, \\
z^{p+1} &: \ a a_1^{p-1} a_2 = 0, \text{ torej je } a_2 = 0, \\
z^{p+2} &: \ apa_1^{p-1} p_3 = 0, \text{ torej je } a_3 = 0, \\
&\ \vdots \\
z^{2p-1} &: \ apa_1^{p-1} a_p = 0, \text{ zato je } a_p = 0, \\
z^{2p} &: \ apa_1^{p-1} a_{p+1} = a_2 a^2 = 0, \text{ ker je } a_2 = 0 \text{ in zato } a_{p+1} = 0 \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Dobili smo rešitev $\varphi(z) = a_1 z$, kjer a_1 reši enačbo $a_1^{p-1} = 1$.

V primeru, ko je $\lambda^m = 1$ za nek $m \geq 2$ (izberemo najmanjšega), iz enačb $a_n\lambda^n = a_n\lambda$ dobimo

$$a_2 = \ldots = a_m = 0,$$

za a_{m+1} pa ne dobimo enačbe. Z enakim razmislekom dobimo, da je $a_{m+2} = \ldots a_{2m} = 0$ itd. Funkcija φ, ki reši $\lambda\varphi(z) = \varphi(\lambda z)$ je zato oblike

$$\varphi(z) = z(a_1 + a_{m+1}z^m + a_{2m+1}z^{2m} + \ldots) = zh(z^m).$$

Teh je preveč. V takem primeru bomo poiskali druge normalne forme.

1.1 Primer. Poglejmo si polinom $P(z) = z^2 - 2$. Ima superprivlačno fiksno točko v ∞ :

$$\frac{1}{P(z^{-1})} = \frac{1}{z^{-2} - 2} = \frac{z^2}{1 - 2z^2} = z^2 \sum_0^\infty (2z^2)^k.$$

Preostali fiksni točki sta $z = -1$ in $z = 2$, ki sta obe odbojni. S preslikavo $h(\zeta) = \zeta + \zeta^{-1}$ se komplement zaprtega enotskega diska preslika konformno na $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. Poleg tega velja

$$P(h(\zeta)) = h(\zeta)^2 - 2 = \zeta^2 + \zeta^{-2} = h(\zeta^2),$$

kar pove, da je P konjugiran ζ^2 na $\{|\zeta| > 1\}$. Iterati teh točk gredo vsi v neskončno, zato to velja tudi za iterate P na $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$. Ker je $P([-2, 2]) = [-2, 2]$, je $A(\infty) = \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.

2. Privlačne fiksne točke

Najlaže obravnavamo privlačne fiksne točke.

Izrek 6.3. *(G.Koenigs, 1884). Naj ima f privlačno fiksno točko pri z_0 z večkratnostjo λ, $0 < |\lambda| < 1$. Potem obstaja konformna preslikava φ v okolici z_0, ki konjugira f v λz. Konjugirajoča preslikava je določena do skalarnega večkratnika natančno.*

Dokaz. Manjka še dokaz eksistence. Privzemimo, da je $z_0 = 0$ in definirajmo $\varphi_n = \lambda^{-n} f^n$. Potem velja

$$\varphi_n(f(x)) = \lambda^{-n} f^{n+1}(x) = \lambda \varphi_{n+1}(x)$$

Recimo, da nam uspe dokazati, da zaporedje konvergira k φ. Potem bo v limiti veljalo

$$\varphi \circ f = \lim_{n \to \infty} \lambda^{-n} f^{n+1} = \lambda \varphi,$$

in bo φ iskana konjugacija.

Dokazati moramo, da limita obstaja in da je konformna v okolici 0. Za dovolj majhne z velja ocena

$$|f(z) - \lambda z| \leq C|z|^2 \leq C|z|\delta \text{ za } |z| < \delta.$$

Potem je

$$|f(z)| \leq (|\lambda| + C\delta)|z|.$$

Z indukcijo dobimo

$$|f^n(z)| \leq (|\lambda| + C\delta)^n |z|, \ |z| < \delta.$$

Izberimo δ tako majhen, da je

$$\frac{(|\lambda| + C\delta)^2}{|\lambda|} = |\lambda| + 2C\delta + C^2\frac{\delta^2}{|\lambda|} = k < 1.$$

Potem je

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| &\leq \frac{f(f^n(z)) - \lambda f^n(z)}{|\lambda|^{n+1}} \\ &\leq \frac{C|f^n(z)|^2}{|\lambda|^{n+1}} \\ &\leq \frac{C(|\lambda| + C\delta)^{2n}|z|^2}{|\lambda|^{n+1}} \\ &\leq \frac{Ck^n|z|^2}{|\lambda|}. \end{aligned}$$

Zaporedje konvergira enakomerno na majhnem krogcu. Zaradi normalizacijskega pogoja so funkcije φ_n oblike $\varphi_n = z +$ členi višjega reda, zato je take oblike tudi limita in je injektivna na okolici 0. ♢

Schröderjeva enačba

$$\varphi \circ f = \lambda\varphi,$$

nam omogoča, da razširimo φ analitično na vse območje privlačnosti s formulo

$$\varphi(z) = \frac{\varphi(f^n(z))}{\lambda^n},$$

kjer n izberemo tako velik, da je $f^n(z)$ v prej definirani δ-okolici. Ker je $\varphi(z_0) = 0$, je tudi $\varphi(z) = 0$ za vsak z, za katerega je $f^n(z) = z_0$ za kak $n \in \mathbb{N}$. Vejo inverzne preslikave φ^{-1}, ki preslika 0 v z_0, lahko analitično nadaljujemo do kritične točke f (ker bi imela φ^{-1} neskončen odvod) oziroma dokler ne pademo iz definicijskega območja f. Če je f polinom ali racionalna funkcija, potem je $\varphi(A(z_0)) = \mathbb{C}$ (delimo z $|\lambda|^n$ in $|\lambda| < 1$). Riemannova ploskev preslikave φ^{-1} je krov nad $\mathbb{C}$, kjer lahko f predstavimo kot množenje z λ in premik z enega lista na drugega.

6.1 Naj bo $f(z)$ končen Blaschkejev produkt reda d z enostavno ničlo pri $z = 0$:

$$f(z) = ze^{i\varphi}\prod_2^d \frac{z - a_j}{1 - \overline{a_j}z}.$$

Poišči območje privlačnosti fiksne točke 0. Pokaži, da je konjugacijska preslikava φ krov nad $\mathbb{C}$. Kakšen je, k proti 1, ∞ proti 1? Ali ima množica ničel φ kako stekališče in če ga ima, ga določi. Določi še kritične točke φ.

3. Odbojne fiksne točke

Če je z_0 odbojna fiksna točka f s koeficientom λ, je z_0 privlačna fiksna točka inverza f^{-1} s koeficientom λ^{-1}. Preslikava, ki konjugira f^{-1} v z/λ, konjugira f v $z\lambda$. Velja namreč

$$\frac{\varphi}{\lambda} = \varphi \circ f^{-1} \quad \Big| \circ f$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\varphi \circ f}{\lambda} = \varphi.$$

Če je $f = P$ polinom z odbojno fiksno točko v izhodišču, lahko preslikavo φ^{-1} z uporabo enačbe $\varphi^{-1}(\lambda z) = P(\varphi^{-1})$ razširimo na $\mathbb{C}$.

6.1 Poišči preslikavo, ki konjugira z^m, $m \geq 2$ v linearno v okolici odbojne fiksne točke $z = 1$.

4. Superprivlačne fiksne točke

Izrek 6.4. *(L.E. Boettcher). Naj ima*

$$f(z) = z_0 + a_p(z - z_0)^p + \ldots$$

v z_0 superprivlačno fiksno točko. Potem obstaja konformna preslikava φ okolice z_0 na okolico 0, ki f konjugira v z^p. Preslikava je določena do množenja s $(p-1)$-vim korenom enote natanko.

Dokaz. Naj bo $z_0 = 0$. Kot v primeru privlačne točke pridemo do ocene

$$|f^n(z)| \leq (C|z|)^{p^n}, \ |z| \leq \delta.$$

Če f konjugiramo s preslikavo $\tilde{\varphi} = z/c$, dobimo

$$\tilde{\varphi} \circ f \circ \tilde{\varphi}^{-1}(z) = \frac{1}{c}(a_p(cz)^p + \ldots..) = a_p c^{p-1} z^p + \ldots..$$

Izberimo c tako, da je prvi koeficient 1. To pomeni, da smemo privzeti, da je $a_p = 1$. Iščemo preslikavo $\varphi(z) = z + \ldots$, ki nam bo f konjugirala v z^p. Postopamo podobno, kot v primeru privlačne točke. Definiramo

$$\varphi_n = (f^n(z))^{p^{-n}} = (z^{p^n} + \ldots)^{p^{-n}} = z(1 + \ldots)^{p^{-n}},$$

ki je dobro definirana na okolici ničle. Tako definirane funkcije zadoščajo

$$\varphi_n \circ f = (f^n \circ f)^{p^{-n}} = (f^{n+1})^{\frac{p}{p^{n+1}}} = (\varphi_{n+1})^p.$$

Če limita φ obstaja, bo rešila ustrezno enačbo. Ocenimo kvocient

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \frac{(f^{n+1})^{p^{-(n+1)}}}{(f^n)^{p^{-n}}} = \left(\frac{(f(f^n))^{p^{-1}}}{f^n}\right)^{p^{-n}} = \left(\frac{\varphi_1 \circ f^n}{f^n}\right)^{p^{-n}}.$$

Po gornji oceni je

$$|\varphi_1(f^n(z))| \leq |f^n(z)||(1 + af^n(z) + \ldots)| \leq |f^n(z)|(1 + \mathcal{O}(|f^n(z)|))$$

zato je

$$\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} \leq (1 + \mathcal{O}(|f^n(z)|))^{p^{-n}} = 1 + \mathcal{O}(p^{-n})\mathcal{O}((C|z|)^{p^n}) = 1 + \mathcal{O}(p^{-n}),$$

če je $|z| \leq 1/C$. Zato produkt

$$\prod \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$$

konvergira enakomerno na $|z| \leq c < 1/C$, kar pomeni, da φ_n konvergira enakomerno na tem območju. Konjugirajoča preslikava za prvotno funkcijo je $\varphi \circ \tilde{\varphi} = \varphi(z/c)$. $\diamondsuit$

Če je f analitično odvisna od parametra, je tudi preslikava φ analitično odvisna od tega parametra in zadošča enačbi $\varphi \circ f = \varphi^p$, s pomočjo katere lahko funkcijo φ razširjamo, dokler ne pridemo do kritične točke f. Če upoštevamo, da velja

$$\log|\varphi \circ f| = p \log|\varphi|,$$

se izognemo težavam z različnimi vejami in lahko preslikavo $\log|\varphi(z)|$ razširimo na vse območje privlačnosti $A(z_0)$. Razširjena funkcija je negativna (smo na območju privlačnosti točke z_0, $\varphi(z_0) = 0$ in vse točke se nekoč preslikajo v dovolj majhno območje okoli 0, kjer je $\log|\varphi|$ negativna), harmonična in ima logaritemske pole v inverznih iteratih z_0.

Naj bo $f : A^*(z_0) \to A^*(z_0)$ p-listni krov nad. Edini pol $\log|\varphi|$ je logaritemski pol pri z_0 in (Taylor!) velja

$$\log|\varphi(z)| = \log|z - z_0| + \mathcal{O}(1)$$

okoli z_0. Iz enačbe $\log|\varphi \circ f|/p = \log|\varphi|$ sledi, da gre $\log|\varphi(z)| \to 0$, ko se približujemo $\partial A^*(z_0)$, saj je za točko blizu roba potrebnih več iteracij, da pridemo v bližino točke z_0. Ugotovili smo, da ima funkcija $\log|\varphi|$ vse lastnosti Greenove funkcije, le da reši enačbo $\triangle = \delta_0$. Zato je

$$\log|\varphi(z)| = -G(z, z_0),\ z \in A^*(z_0).$$

4.1 Primer. Polinom $P(z) = az^d + \ldots$ za $a \neq 0$ in $d \geq 2$ ima v ∞ superprivlačno točko, zato se konjugira v z^d v neskončnosti. Gre za to, da če je φ konjugirajoča preslikava za superprivlačno točko 0 za funkcijo $1/P(1/z)$, je $1/\varphi(1/z)$ konjugirajoča preslikava za $P(z)$. Konjugirajoča preslikava ima v okolici ∞ obliko $\varphi(z) = cz + \mathcal{O}(1)$, ko gre $z \to \infty$ z enostavnim polom v ∞ (ne pozabimo, da smo v dokazu izreka 6.4. uvedli novo spremenljivko $w = cz$ in da se zadaj skriva dvojno invertiranje). Po enakem razmisleku kot prej lahko φ s pomočjo funkcijske enačbe $\log|\varphi \circ f|/d = \log|\varphi|$, ki velja v okolici ∞, razširimo na celotno območje privlačnosti $A(\infty)$. Po principu maksima $A(\infty)$ nima omejenih komponent. Če bi bila taka komponenta, bi bila funkcija $\log|\varphi|$ navzdol omejena z minimom v notranjosti (na robu je 0), saj se mora taka komponenta zaradi funkcijske enačbe z iteriranjem preslikati v $A^*(\infty)$, vendar slika ne more vsebovati ∞, ker je preslikava f polinom. V tem primeru velja

$$\log|\varphi(z)| = \log|z| + \log|c| + o(1);$$

tu upoštevamo, da je

$$\varphi(z) = \frac{1}{1/(cz) + d/z^2 + \ldots} = \frac{cz}{1 + \frac{cd}{z} + \ldots}.$$

Z logaritmiranjem dobimo

$$\log|\varphi(z)| = \log|cz| + |\log|(1 + \frac{cd}{z} + \ldots)| = \log|z| + \log|c| + O(1/|z|),\ |z| \to \infty.$$

Kot se spomnimo iz analize, Greenova funkcija na neomejenih območjih ni nujno enolična, če ne damo dodatnih pogojev. V tem primeru zahtevamo tako obliko v neskončnosti kot zgoraj,

$$G(z, \infty) = \log|z| + \sigma + o(1).$$

Konstanta σ se imenuje *Robinova konstanta* . V našem primeru je to $\log|c|$. Iz dokaza izreka 6.4. dobimo $|c| = |a|^{1/d-1}$.

5. Racionalno nevtralne fiksne točke

Naj bo $\lambda^n = 1$ in $f(z) = \lambda z + az^{p+1} + \dots$, $a \neq 0$. Ločili bomo primere

(a) $\lambda = p = 1$,

(b) $\lambda = 1, p > 1$,

(c) $\lambda^n = 1,\ \lambda \neq 1$.

1. primer

(Parabolična fiksna točka z eno zanko). Privzemimo, da je $f(z) = z + az^2 + \dots$, $a \neq 0$. S konjugiranjem z $\varphi(z) = az$ smemo privzeti, da je $a = 1$. Konjugiramo še z inverzijo $-z^{-1}$ in dobimo preslikavo oblike

$$g(z) = z + 1 + \frac{b}{z} + \dots.$$

Trdimo, da je ta preslikava konjugirana translaciji $z + 1$. Za dokaz si bomo ogledali dva pristopa - Fatoujev, ki temelji na asimptotskem vedenju g^n in pristop z uporabo kvazikonformnih preslikav.

Najprej opazimo, da je za dovolj velike C_0 ravnina $\{\mathrm{Re}(z) > C_0\}$ invariantna za g, saj je rep vrste majhen in velja

$$\mathrm{Re}\, g^n(z) > \mathrm{Re}(z) + \frac{n}{2},\ \ \mathrm{Re}(z) \geq C_0, n \geq 1.$$

To dobimo iz ocene

$$\frac{n}{2} \leq |g^n(z)| \leq |z| + 2n,\ \ \mathrm{Re}(z) \geq C_0, n \geq 1. \tag{6.1}$$

Te ocene vedno veljajo, če je g oblike $z + 1 + o(1)$. Prednost ocene je, da lahko ocenimo velikost v odvisnosti od n.

Prva metoda. Definiramo

$$\varphi_n(z) = g(z)^n - n - b \log n,\ \ \mathrm{Re}(z) \geq C_0.$$

Iz razvoja g v vrsto in ocene 6.1 za ostanek

$$g^{k+1}(z) = g^k(z) + 1 + \frac{b}{g^k(z)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

dobimo

$$\varphi_{k+1}(z) - \varphi_k(z) = b(\log k - \log(k+1)) + \frac{b}{g^k(z)} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2}) = \mathcal{O}(\frac{1}{k}).$$

Potem je

$$|\varphi_n(z) - z| \leq |\varphi_1(z) - z| + \sum_{1}^{n-1} |\varphi_{k+1}(z) - \varphi_k(z)| = \mathcal{O}(\log n)$$

za $\mathrm{Re}(z) \geq C_0$. Ocenimo še drugače:

$$\begin{aligned}
\varphi_{k+1}(z) - \varphi_k(z) &= b(\log k - \log(k+1)) + g^{k+1}(z) - g^k(z) - 1 \\
&= -b\log(1+1/k) + \frac{b}{g^k(z)} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2}) \\
&= -\frac{b}{k} + \frac{b}{g^k(z)} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2}) \\
&= b\left(\frac{1}{\varphi_k + k + b\log k} - \frac{1}{k}\right) + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2}) \\
&= b\frac{k - k - b\log k - \varphi_k(z)}{k(\varphi_k + k + b\log k)} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2}) \\
&= \frac{b}{k^2} \cdot \frac{-b\log k - \varphi_k(z)}{1 + (\varphi_k(z) + b\log k)/k} + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2}) \\
&= \frac{b}{k^2} \cdot \mathcal{O}(|b\log k + \varphi_k(z)|) + \mathcal{O}(\frac{1}{k^2}) \\
&= \mathcal{O}(\frac{\log k}{k^2}),
\end{aligned}$$

saj je $|\varphi_k(z)| \leq |\varphi_1(z)| + \mathcal{O}(\log k)$, torej je pri fiksnem z res $\mathcal{O}(\log k)$. Vsota

$$\sum \varphi_{k+1} - \varphi_k$$

je absolutno konvergentna, zato ima zaporedje φ_k limito φ. Ker je

$$\begin{aligned}
\varphi_k(g(z)) &= g^k(g(z)) - n\ b\log n \\
&= \varphi_{k+1}(z) - n - b\log n + (n+1) + b\log(n+1) \\
&= \varphi_{k+1}(z) + 1 + b\log(1+1/n),
\end{aligned}$$

dobimo v limiti

$$\varphi(g(z)) = \varphi(z) + 1.$$

S pomočjo te enačbe lahko φ analitično razširimo na območje Ω, na katerem je g definirana in zadošča $g(\Omega) \subset \Omega$. Najprej iz razvoja v vrsto ugotovimo, da je za z z dovolj velikim realnim delom rep vrste majhen in je zato $g(z) = z+1+\varepsilon$, torej je vsaka polravnina $\{\operatorname{Re} z > C_0\}$ za dovolj velik C_0 invariantna. Rep je majhen na komplementu vsake dovolj velike krogle. Zato bo dobra izbira npr. vsaka 'na kroglo tangentna polravnina', ki bo invariantna na translacije. Skupaj dobimo lahko unijo treh polravnin oblike

$$\{|y| > -\delta x + C_\delta\} \cup \{\operatorname{Re} z > C_0\}$$

za vsak pozitiven delta. Z nekaj več truda pridemo do območij z gladkim robom. Za del območja Ω v polravnini $x < -2$ lahko vzamemo območje nad krivuljo $y = C \log |x|$ in območje pod krivuljo $y = -C \log |x|$ za dovolj velik C. Na desni območje gladko zaključimo, tako da se ognemo veliki krogli. Poglejmo, kam se preslikajo točke na teh mejnih krivuljah. Ker je

$$g(z) = x + 1 + iy + \frac{b}{x + iy} + \mathcal{O}(1/|z|^2),$$

je

$$g(x+iC\log|x|) = x+1+iC\log|x|+b\frac{x - iC\log|x|}{x^2 + C^2\log^2|x|}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2 + C^2\log^2|x|}\right).$$

Izračunajmo logaritem realnega dela:

$$\begin{aligned}
\log|u| &= \log\left|x + 1 + \mathcal{O}(x^{-1})\right| \\
&= \log\left(x\left|1 + \frac{1}{x} + \mathcal{O}(x^{-2})\right|\right) \\
&= \log|x| + \log\left(\left|1 + \frac{1}{x} + \mathcal{O}(x^{-2})\right|\right) \\
&= \log|x| - \frac{1}{|x|} + \mathcal{O}(x^{-2}).
\end{aligned}$$

Njegov C-kratnik mora biti manjši od imaginarnega dela, ki ga navzdol ocenimo:

$$v \geq C\log|x| - \frac{A}{\sqrt{x^2 + C^2\log^2|x|}}.$$

Izračunajmo razliko

$$v - C\log|u| \geq C\log|x| - \frac{A}{\sqrt{x^2 + C^2\log^2|x|}} - C\log|x| + \frac{C}{|x|} + \mathcal{O}(x^{-2}).$$

Hočemo, da bo pozitivna, zato mora biti

$$\frac{C}{|x|} - \frac{A}{\sqrt{x^2 + C^2 \log^2 |x|}} \geq \frac{d}{x^2}.$$

Premečemo in dobimo

$$C\sqrt{1 + \left(C\frac{\log|x|}{|x|}\right)^2} - A \geq \frac{d}{x}\sqrt{1 + \left(C\frac{\log|x|}{|x|}\right)^2}.$$

Ker je za $|x| > 2$ funkcija $\log|x|/|x|$ navzgor omejena z e^{-1}, konstanta C pa na levi nastopa s potenco 1, na desni pa s potenco 1/2, lahko enačbo izpolnimo za primerno velik C. Zdaj pa lahko logaritemski krivulji povežemo s 'parabolo', tako da se izognemo dovolj veliki krogli. Napake pri g bodo majhne, zato se bo g še vedno obnašala približno kot translacija, vendar za manjši vektor. Podoben razmislek pokaže, da je družina območij Ω_t, s pogojem $|y| < C\log|x|+t$, $x \geq C_0$ tudi invariantna za g. Območja Ω_t zapolnijo $x > C_0$. Za vsak $C_1 > C$ je območje Ω^* dano z $x > C_0$ in $|y| < C_1 \log|x|$ invariantno za g in seka vsako orbito iz polravnine $x > C_0$.

Inverzija $-z^{-1}$ nese Ω v srčkasto območje, ki ga imenujemo privlačna zanka za fiksno točko. Znotraj zanke je preslikava konjugirana $z \to z/(1-z)$.

Druga metoda. Privzemimo kot prej, da je g oblike $g(z) = z + 1 + b/z + \ldots$ in $V = \{\mathrm{Re}\, z > A\}$ g-invariantna polravnina. Naj bo $L = \{\mathrm{Re}\, z = A\}$. Potem je $L' = g(L)$ gladka krivulja, ki je za dovolj velike A približno $L + 1$. S S označimo pas med L in L'. Naj bo $\Sigma = \{0 < \mathrm{Re}\,\zeta < 1\}$ pravi pas. Konstruirajmo difeomorfizem h množice Σ na S, za katerega je $h(i\eta) = A+i\eta$, $h(1+i\eta) = g(A)$, vmes pa ga gladko razširimo, enakomerno v imaginarno smer. Privzeli bomo, da je h konformna na nekem disku v Σ. Z iteriranjem formule $h(\zeta + 1) = g(h(\zeta))$ razširimo h do difeomorfizma celotne desne polravnine na V. Ker je g analitična, je Beltramijev koeficient μ invarianten na translacije za 1. Periodično ga razširimo na celotno ravnino. Potem je gladek povsod, razen v ∞ in na slikah diska, kjer je bila h konformna, je enak 0. Po konstrukciji je Beltramijev koeficient omejen (enakomerna razširitev v imaginarni smeri), $|\mu| \leq k < 1$. Naj bo ψ rešitev Beltramijeve enačbe, ki fiksira 0, 1 in ∞ (Le zakaj lahko fiksira te točke? MT. Zakaj jo lahko rešimo? Ker je koeficient na diskih enak 0 in ta disk lahko postavimo v okolico ∞.). Polje elips je invariantno za translacijo za 1. Zato je preslikava $\psi_1 = \psi \circ G \circ \psi^{-1}$ povsod konformna, saj preslika kroge na kroge (komentar pri reševanju B.E.) in slika

Riemannovo sfero nase. Zato je MT. Ker fiksira ∞, je linearna. Zato mora rešiti enačbo $\psi(\zeta+1) = a\psi(\zeta)+1$ oz. $\psi \circ G = a\psi + 1$.

Definirajmo $\varphi = \psi \circ h^{-1}$. Preslikava ψ je analitična na V, ker je ψ rešila Beltramijevo enačbo za Beltramijev koeficient preslikave h. Ker po definiciji h velja $G(\zeta) = \zeta + 1 = h^{-1} \circ g \circ h$, je

$$\varphi \circ g = \psi \circ h^{-1} \circ g = \psi \circ G \circ h^{-1} = a(\psi \circ h^{-1}) + 1 = a\varphi + 1.$$

Trdimo, da je $a = 1$. Najprej opazimo, da je

$$\varphi(g^n(z)) = a^n\varphi(z) + a^{n-1} + \ldots + 1.$$

Ker gre $\varphi(g^n(z)) \to \infty$, mora biti $|a| \geq 1$. če je $|a| = 1$ in $a \neq 1$, je izraz tudi omejen, zato ti primeri odpadejo. Izločiti je potrebno še primer $|a| > 1$. V ta namen preslikavo φ razširimo do kvazikonformnega difeomorfizma Riemannove sfere in sicer tako, da preslikavo h^{-1} razširimo z V do kvazikonformnega difeomorfizma Riemannove sfere (slika!). Zahtevamo lahko, da je preslikava taka, da bo φ zožitev kvazikonformnega difeomorfizma $\overline{\mathbb{C}}$ na V, ki bo na okolici neke točke $b < 0$, kjer je ψ analitična, konformna (skoraj identiteta) (ne povsem trivialno; narisati je treba sliko in razložiti, zakaj lahko to predpišemo). Potem je preslikava $u(z) = \varphi(b+z) - b$ konformna na okolici 0 z ničlo v 0 in odvodom 1. Njena konjugiranka $v(z) = 1/u(1/z)$ je konformna okoli ∞ in je v razredu $QC^1(k', R')$ za neka k' in R'. Po ocenh za kvazikonformne preslikave za praslike s preslikavo v dobimo ocene

$$|v^{-1}(z_1) - v^{-1}(z_2)| \leq C|z_1 - z_2|^{1-p/2}$$

za nek primeren $p > 2$ za z_1, z_2, ki sta iz območja, ki nas zanima (to je slika V). Če vstavimo namesto z_1 izraz $v(z_1)$, ki po konstrukciji zaradi invariantnosti tudi leži na območju, kjer lahko enačbo uporabimo, za z_2 pa vzamemo 0, dobimo okoli točke 0 oceno

$$|z_1| \leq C|v(z_1)|^{1-p/2},\ |v(z_1)| < 1/R'.$$

Če vstavimo $z_1 = 1/(g^n(z) - b)$ dobimo

$$\left|\frac{1}{g^n(z)-b}\right| \leq C\left|\frac{1}{\varphi(g^n(z))-b}\right|^{1-p/2}.$$

Obrnemo in dobimo

$$|\varphi(g^n(z)) - b|^{1-p/2} \leq |g^n(z) - b|.$$

Poglejmo zdaj red naraščanja. Recimo, da je $|a| > 1$. Ker je $g^n(z) \doteq z + n$, mora biti po gornji oceni

$$|a^n \varphi(z) + (a^n - 1)/(a - 1) - b|^{1-p/2} \leq |z + n - b|.$$

Red velikosti naraščanja na levi je $|a|^{n(1-p/2)}$, zato to ni mogoče za $|a| > 1$. Velja $a = 1$. S tem smo dokazali, da je φ želena konjugacija. $\diamondsuit$

2. primer

(Parabolična fiksna točka z več zankami) Privzemimo, da je $z' = f(z) = z + az^{p+1} + \ldots$, $a \neq 0$ in $p > 1$. Kot prej smemo privzeti, da je $a = 1$, saj preslikavo konjugiramo z $z \to \lambda z$ in dobimo

$$\frac{1}{\lambda} f(\lambda z) = \frac{1}{\lambda}(\lambda z + a\lambda^{p+1} z^{p+1} + \ldots),$$

tako da vzamemo eno rešitev enačbe $\lambda^p = 1/a$. Označimo argument λ s t. Velja

$$t = \arg \lambda = -\arg a/p + 2\pi k/p.$$

Definirajmo $z = \zeta^{1/p}$ in $z' = \zeta'^{1/p}$ za $0 < \arg \zeta, \arg \zeta' < 2\pi$ in z, z' z argumentom v $(0, 2\pi/p)$. Potem je

$$z' = \zeta'^{1/p} = \zeta^{1/p} + \zeta^{(p+1)/p} + \ldots.$$

Če potenciramo na p-to potenco, dobimo

$$\zeta' = \zeta + p\zeta^{(p-1)p^{-1}+1+p^{-1}} + O(\zeta^{(p-1)p^{-1}+1+2p^{-1}}) = \zeta + p\zeta^2 + O(\zeta^{2+p^{-1}})$$

Renormaliziramo, tako da odstranimo p in konjugiramo z $-1/z$. Pišimo $z' = -1/\zeta'$ in $z = -1/\zeta$. Potem je nova preslikava oblike

$$z' = g(z) = z + 1 + \mathcal{O}(|z|^{-1/p}).$$

Nadaljujemo kot v drugem dokazu prejšnjega primera. Lahko uporabimo tudi prvi dokaz, vendar so ocene bolj komplicirane. Preslikava g je konjugirana $\zeta + 1$.

6.1 Dokaži, da obstaja invariantno območje Ω za g, ki je omejeno z $y = \pm C|x|^{1-1/p}$ na nekem polprostoru $x < -A$, $A > 0$.

Iz tega območja dobimo zanko kot v 1. primeru, le da je to za spremenljivko ζ. Za originalno spremenljivko dobimo zanko z argumenti v $(0, 2\pi/p)$. Če bi vzeli za z argument v $(2\pi/p, 4\pi/p)$, bi dobili enako zanko. In tako dalje. Nazadnje moramo še pogledati, kakšne so zanke za prvotno preslikavo. Dobimo p zank z mejnimi koti $2\pi k/p$. Naj bo $\lambda = re^{it}$. Označimo konjugirano preslikavo z F (ta ima mejne kote $2\pi k/p$). Potem je prvotna preslikava enaka

$$f(z) = re^{it}F(ze^{-it}/r).$$

Če je $\arg z - t \in (2\pi k/p, 2\pi(k+1)/p)$, bo $F(ze^{-it}/r)$ preslikal zanko v tem sektorju na zanko v premaknjenem sektorju $(2\pi k/p, 2\pi(k+1)/p)$, množenje pa jo bo postavilo nazaj na prejšnje mesto. Zato se zanke nahajajo med poltraki z argumenti

$$\frac{2\pi k}{p} + t = \frac{2\pi k}{p} - \frac{\arg a}{p}.$$

Poglejmo še, kaj se dogaja na teh poltrakih. Če je $z = re^{it}$, je $az^p = |a|re^{\arg a - \arg a + 2\pi k} > 0$. Zato je izraz $|1 + az^p|$ tu maksimalen in večji od 1. Preslikava

$$f(z) = z(1 + az^p) + \mathcal{O}(|z|^{p+2})$$

je zato na teh poltrakih 'odbojna' (preslikava f se tu širi). Omenjene poltrake imenujemo tudi odbojne smeri. Privlačne smeri so ravno vmesni poltraki, saj dobimo za rezultat produkta az^p negativno število, zato je koeficient $|1 + az^p|$ tam najmanjši in f tu najbolj krči.

6.2 Naj bo $f(z) = z + z^{p+1} + a_{p+2}z^{p+2} + \ldots$. Pokaži, da lahko s konjugiranjem s preslikavo $\varphi(z) = z + az^n$ dosežemo, da bo konjugiranka oblike $f(z) = z + z^{p+1} + Az^{2p+1} + \mathcal{O}(|z|^q)$ za nek $q > 2p + 1$. Pokaži, da če konjugiranje ohranja to obliko, je A konstanten.

Opomba. Če je $\varphi(z) = z + az^n$, je $\varphi^{-1}(z) = z(1 + \sum_1^\infty c_k z^{(n-1)k})$. Če rešujemo $\varphi(\varphi^{-1})(z) = z$, dobimo na levi eksponente oblike $1 + (n-1)l$ na desni pa $n + (n-1)s$. Za dan k mora biti $s = l - 1$, da sta eksponenta enaka. Ta s pa dobimo, ko je vsota $k_i = s$, torej smo za izračun koeficienta c_l dobili na desni izraz, ki vsebuje koeficiente z nižjimi indeksi. Zato so vse te enačbe rešljive.

3. primer

Naj bo $f(z) = \lambda z + az^{p+1} + \dots$, kjer je $\lambda^k = 1$ za nek k. Potem preslikava f^k spada ali v 1. primer ali v 2. primer. Naj bodo $P_1, \dots P_p$ zanke za f^k. Potem so to tudi zanke za f, saj je preslikava $f(z) = \lambda f^k(z)$ za majhne z množenje z λ, ki po k korakih prinese zanko nase. To pomeni, da mora kot $(0, 2\pi/k)$ vsebovati cele zanke, $f(P_i) = P_j$ in f ciklično permutira zanke v ciklih dolžine k. Zato je $p = nk$ za nek n.

6. Iracionalno nevtralne fiksne točke

Naj bo $f(z) = \lambda z + az^{p+1} + \dots$, kjer je $\lambda = e^{2\pi i t}$ za nek t. Iščemo rešitev Schröderjeve enačbe $\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z)$ pri pogoju $\varphi'(0) = 1$. Za preslikavo $h = \varphi^{-1}$ je to enačba

$$f(h(z)) = h(\lambda z),\ h'(0) = 1.$$

Izrek 6.5. *Rešitev h Schröderjeve enačbe obstaja natanko tedaj, ko je zaporedje f^n enakomerno omejeno na nekem Δ_r.*

Dokaz. Č h obstaja, je $f^n(z) = h(\lambda^n h^{-1}(z)) \subset h(S(0, |h^{-1}(z)|))$, zato je omejeno. Če je omejeno z konstanto M na δ_r, je zaporedje funkcij

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1} \lambda^{-j} f^j(z)$$

enakomerno omejeno, zato ima konvergentno podzaporedje. Ker je

$$\begin{aligned}
\varphi_n(f(z)) &= \frac{1}{n}\sum_0^{n-1}\lambda^{-j}f^{j+1}(z) \\
&= \frac{\lambda}{n}\sum_0^{n-1}\lambda^{-(j+1)}f^{j+1}(z) \\
&= \frac{\lambda}{n}\sum_1^{n}\lambda^{-j}f^{j}(z) \\
&= \frac{\lambda}{n}\left(\sum_0^{n-1}\lambda^{-j}f^{j}(z)+\lambda^{-n}f^n(z)-f(z)\right) \\
&= \lambda\varphi_n(z)+\frac{\lambda}{n}\left(\lambda^{-n}f^n(z)-f(z)\right).
\end{aligned}$$

Zaradi enakomerne omejenosti f^n je zadnji oklepaj omejen z $(M+M)/n$, limita φ reši enačbo $\varphi\circ f=\lambda\varphi$. Ker je $\lambda=f'(0)$ in $f(0)=0$, je $\varphi'(f(0))f'(0)=\lambda\varphi'(0)$, zato je $\varphi'(0)=1$. $\diamondsuit$

Posledica 6.6. *Če je f topološko konjugirana λz, je tudi konformno konjugirana λz.*

Dokaz. Če za lokalni homeomorfizem h, definiran na okolici 0, ki fiksira 0, velja $h^{-1}(f(h(z)))=\lambda z$, potem je na dovolj majhni okolici 0 preslikava f invariantna. Če vzamemo dovolj majhen Δ_r in pišemo $D=h(\Delta_r)$, je

$$f(h(\Delta_r))=h(\lambda\Delta_r).$$

Ker je množenje z λ rotacija, je $h(\lambda\Delta_r)=D$ in zato $f(D)=D$. Preslikava je zato enakomerno omejena in po prejšnjem izreku obstaja holomorfna konjugacija. $\diamondsuit$

Izrek 6.7. *Obstaja tak $\lambda=e^{2\pi it}$, da Schröderjeva enačba nima rešitve za noben polinom f.*

Dokaz. Naj bo $f(z)=z^d+\ldots+\lambda z$ in privzemimo, da obstaja konjugacija h, definirana na Δ_δ. Poglejmo vse fiksne točke f^n, t.j. rešitve enačbe

$$f^n(z)-z=z^{d^n}+\ldots+(\lambda^n-1)z=0.$$

Označimo ostale ničle z $z_1, \ldots z_{d^n-1}$. Ker ima enačba $f^n(z) = h(\lambda^n h^{-1}(z))$ eno samo ničlo na Δ_δ, je $|z_j| > \delta$ za $j = 1, \ldots d^n - 1$. Zato je

$$\delta^{d^n-1} \leq \prod |z_i| = |1 - \lambda^n|.$$

Konstrurajmo λ, za katerega ta neenakost ne velja. Naj bo q_i strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil in naj bo $t = \sum_1^\infty 2^{-q_i}$ in $\lambda = e^{2\pi it}$. Izračunajmo še

$$2^{q_k} t = \sum_1^\infty 2^{-q_i+q_k} = 2^{q_k-q_1} + \ldots + 2^{q_k-q_{k-1}} + 1 + 2^{q_k-q_{k+1}} + \text{ členi nižjega reda }.$$

Označimo del izraza z N :

$$N = 2^{q_k-q_1} + \ldots + 2^{q_k-q_{k-1}} + 1.$$

S to pisavo je

$$\lambda^{2^{q_k}} = e^{2\pi it} = e^{2\pi i(N+2^{q_k-q_{k+1}}+\ldots)} = e^{2\pi i(2^{q_k-q_{k+1}}+\ldots)}.$$

Iz tega po Taylorju sledi ocena

$$|1 - \lambda^{2^{q_k}}| = |1 - e^{2\pi i 2^{q_k-q_{k+1}}}| \sim 2^{q_k-q_{k+1}}.$$

Po drugi strani je

$$|1 - \lambda^{2^{q_k}}| \geq \delta^{d^{2^{q_k}}}.$$

Če logaritmiramo z osnovo 2, dobimo

$$d^{2^{q_k}} \log_2(\delta) \leq D(q_k - q_{k+1}).$$

Pišemo $\log_2(\delta) = -C^{-1} < 0$ in s tem delimo, da dobimo

$$d^{2^{q_k}} \geq CDq_{k+1} - CDq_k.$$

Potem je

$$q_{k+1} \leq D(\delta) d^{2^{q_k}}.$$

Če induktivno izberemo dovolj hitro naraščajoče zaporedje q_k, da ocena ne velja, smo v protislovju za vsak d in δ. $\diamondsuit$

Izkaže se, da za določen razred števil t, ki se jim reče diofantska, lahko najdemo rešitev Schröderjeve enačbe za $f(z) = e^{2\pi it} z + \ldots$. Diofantska števila so tista, ki se jih ne da ‘dobro aproksimirati z ulomki’ (karkoli že to pomeni). Izkaže se, da so taka skoraj vsa realna števila (tista, ki niso, imajo mero 0). število t je diofantsko natanko tedaj, ko obstajata $c > 0$ in $2 < m < \infty$, da za $\lambda = e^{2\pi it}$ velja

$$|\lambda^n - 1| \geq cn^{1-\mu} \text{ za vsak } n \geq 1.$$

Izkaže se, da velja naslednji

Izrek 6.8. *(Siegel). Naj bo* $\lambda = e^{2\pi it}$ *in* t *diofantsko število. Naj ima* f *fiksno točko v* 0 *z odvodom* λ*. Potem obstaja rešitev Schröderjeve enačbe, tj.* f *je konjugirana množenju z* λ *v okolici* 0.

Dokaz izpustimo.

7. Osnove racionalne iteracije

S pomočjo racionalne funkcije na Riemannovi sferi bomo sfero razdelili na dva dela, na del, kjer se iteracije R dobro vedejo (Fatoujeva množica) in na del, kjer se ne (Juliajeva množica). Prvi pomembnejši rezultat v tej smeri je bil rezultat Fatouja in Juliaja, ko sta dokazala, da so odbojne periodične točke goste v Juliajevi množici. Oznaka R bo rezervirana za racionalno funkcijo, oznaka f pa za holomorfno.

1. Normalne družine, Riemannove ploskve, Montelov izrek

Definicija 7.2. *(Normalne družine). Naj bo $\mathcal{F}$ družina meromorfinh funkcij na območju $D \subset \overline{\mathbb{C}}$. Družina $\mathcal{F}$ je normalna, če ima vsako zaporedje $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ konvergentno podzaporedje (v topologiji enakomerne konvergence na kompaktnih podmnožicah $\overline{\mathbb{C}}$).*

Izrek 7.3. *(Arzelà–Ascoli). Naj bo M kompakten in N poljuben metrični prostor. Naj bo množica N opremljena s sup metriko d_*. Potem je podmnožica $\mathcal{F}$ prostora $C(M, N)$ natanko tedaj relativno kompaktna, ko sta izpolnjena pogoja*

(a) za vsak $x \in M$ je množica $\mathcal{F}(x) := \{f(x),\ f \in \mathcal{F}\}$ relativno kompaktna in

(b) družina $\mathcal{F}$ je enakozvezna.

Izrek 7.4. *(Montelov izrek). Družina $\mathcal{F}$ analitičnih funkcij na D, ki je omejena z neko fiksno konstanto, je normalna.*

Dokaz. Zadošča dokazati izrek za enotski disk. Naj bo M zgornja meja in $K \subset \Delta$ poljuben kompakt. Potem je $d(K, S^1) = d > 0$. Ker je za vsak $x \in K$

$d(x, S^1) \geq d$, velja

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z| = d} \frac{f(\xi) - f(z)}{(\xi - z)^2} \, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z| = d} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} \, d\xi$$

je

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi - z| = d} \frac{|f(\xi)|}{|(\xi - z)^2|} \, d\xi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi d \frac{M}{d^2} \\ &= \frac{M}{d}. \end{aligned}$$

Ocene te vrste so Cauchyjeve ocene. Na enak način dobimo ocene tudi za ostale odvode. Dokazali smo, da so odvodi članic $\mathcal{F}$ omejeni z isto konstanto, torej je družina enakozvezna. $\diamondsuit$

Definicija 7.5. *Riemannova ploskev je kompleksna enodimenzionalna mnogoterost (realno dvodimenzionalna gladka mnogoterost, kjer so prehodne preslikave holomorfne).*

Primeri Riemannovih ploskev so $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}P_1$, kompleksni torusi, Riemannove ploskve preslikav...

1.1 Riemannov izrek.

Riemannov izrek pravi, da je vsako enostavno povezano območje D v $\overline{\mathbb{C}}$, ki ima v komplementu vsaj dve točki, konformno ekvivalentno disku. Zanima nas, kdaj lahko to konformno preslikavo razširimo do biholomorfizma zaprtij. Izkaže se, da je potreben in zadosten pogoj za to lokalna povezanost roba.

Izrek 7.6. *(Carathéodory) Naj bo D enostavno povezano območje v $\overline{\mathbb{C}}$, ki ima v komplementu vsaj dve točki. Potem je ∂D lokalno povezan natanko tedaj, ko se Riemmanova preslikava $\Delta \to D$ zvezno razširi na zaprtje.*

2. Juliajeva množica

Iterate preslikave $f : S \to S$ Riemannove ploskve S nase definiramo enako kot prej. Nulti iterat naj bo identiteta. Iterat R^n racionalne funkcije ima stopnjo d^n. *Orbita* točke z_0 za preslikavo f je množica $\{f^n(z_0)\}$, *predorbita* pa $\{f^{-n}(z_0)\}$. Po verižnem pravilu dobimo

$$f^{n\prime}(z_0) = f'(f^{n-1}(z_0))f^{n-1\prime}(z_0) = f'(z_{n-1})f'(z_{n-2})\dots f'(z_0).$$

Točka z_0 je *periodična*, če je $z_n = z_0$ za nek n. Minimalni tak n imenujemo *perioda*, množico $\{z_0, \dots z_{n-1}, z_n = z_0\}$ pa cikel. Tudi fiksna točka je cikel. Cikle glede na tip periodične točke imenujemo *privlačne, odbojne, racionalno nevtralne in iracionalno nevtralne*. Cikel $\{z_0, \dots z_{n-1}, z_n = z_0\}$ je npr. privlačen, če je (po verižnem pravilu)

$$|f^{n\prime}(z_0)| = \prod |f'(z_i)| < 1.$$

Ker je produkt neodvisen od vrstnega reda točk v orbiti, so odvodi $f^{n'}(z_i)$ vsi enaki. Točka z_0 je *predperiodična*, če je z_k periodična za kak k in *strogo predperiodična*, če je predperiodična, pa ni periodična. Periodična točka $z_0 = f^n(z_0)$ s periodo n je *parabolična*, če je večkratnost $\lambda = (f^n)'(z)$ pri z_0 enaka 1, vendar f^n ni identiteta. Splošneje, λ je koren enote in noben iterat f ni identiteta.

Definicija 7.7. *(Območje privlačnosti privlačne orbite). Če je*

$$\{z_0, \dots z_{n-1}, z_n = z_0\}$$

privlačna orbita reda n, definiramo območje privlačnoti te orbite kot (odprto) množico vseh točk z, za katere zaporedje $f^{kn}(z)$ konvergira h kakemu elementu orbite. Označimo ga z $A(z_0)$. Območje takojšnje privlačnosti $A^*(z_0)$ je unija tistih n komponent $A(z_0)$, ki vsebujejo točke začetnega cikla.

Primeri.
1. Za $f(z) = z^2$ je Juliajeva množica $|z| = 1$.
2. Za $f(z) = z^2 - 2$ je Juliajeva množica $[-2, 2]$.
3. Vzemimo $f(z) = \lambda z + z^2$, $|\lambda| = 1$, kjer je f v okolici 0 konjugirana iracionalni rotaciji, $\lambda = e^{2\pi i t}$ za nek diofantski t. Potem je $\{R^n\}$ normalna v okolici 0 in ∞. Naj bosta U_0 in U_∞ povezani komponenti, ki vsebujeta točki 0 in ∞ po vrsti. Ker $R^n(0) = 0$, morata biti različni. Zato sta disjunktni tudi $R^n(U_0)$ in U_∞ in družina $\{R^n\}$ je na U_0 enakomerno omejena. Ker je po principu maksima $\{R^n\}$ omejena znotraj vsake zaključene zanke v U_0, mora biti U_0 enostavno povezana. Po izreku 6.5. obstaja konjugacijska preslikava na U_0. Množica U_0 je

torej največja množica, ki vsebuje 0, na kateri obstaja konjugacijska preslikava.

Vsaka enostavno povezana komponenta Fatoujeve množice, na kateri je R konjugirana iracionalni rotaciji, se imenuje *Sieglov disk*.

Izrek 7.8. *(V Fatoujevi množici so privlačne fiksne točke.) Fatoujeva množica vsebuje vse privlačne fiksne točke in vse nevtralne fiksne točke, ki ustrezajo Sieglovim diskom. Vse odbojne fiksne točke in vse nevtralne fiksne točke, ki ne ustrezajo Sieglovim diskom so v Juliajevi množici.*

Dokaz. (Izpustimo) Direktno sledi iz izreka (tega smo izpustili), ki pove, da konjugirajoča preslikava pri iracionalni fiksni točki obstaja tedaj in samo tedaj, ko je zaporedje iteracij omejeno, torej imamo Sieglov disk. Če ni tako, nimamo diska, zaporedje iteratov na okolici take točke ni omejeno in zato ne leži v Fatoujevi množici.

Izrek 7.9. *Juliajeva množica je neprazna, če je R racionalna stopnje vsaj* 2.

Brez dokaza.

Izrek 7.10. *Juliajeva množica je popolnoma invariantna.*

Opomba. Ta izrek pove, da ima Juliajeva množica veliko samopodobnosti. Če je $z \in \mathcal{J}$ točka, v kateri odvod f ni 0, potem obstaja konformni izomorfizem okolice U_z točke z na okolico $U_{f(z)}$ točke $f(z)$, ki nese $U_z \cap \mathcal{J}$ ravno na $U_{f(z)} \cap \mathcal{J}$. Pravimo, da sta (J, z) in $(J, f(z))$ lokalno izomorfna.

Dokaz. Dokazali bomo ekvivalentno trditev, da je $\mathcal{F}$ popolnoma invariantna. Takoj opazimo, da je $R^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ zaradi pogojev na konvergenco zaporedja R^n. To pomeni, da je $\mathcal{F} \subset R(\mathcal{F})$. Recimo, da za $z_0 \in \mathcal{F}$ element $R(z_0)$ ni v $\mathcal{F}$. Obstaja zaporedje $n_j + 1$, tako da $R^{n_j+1}(z_0) = R^{n_j}(R(z_0))$ konvergira enakomerno na okolici z_0. Torej R^{n_j} konvergira enakomerno na okolici $R(z_0)$. Zato je $R(z_0) \in \mathcal{F}$ oziroma $R(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$. S tem smo dobili še obratno inkluzijo. $\diamondsuit$

Izrek 7.11. *Za vsak $N \geq 1$ sta Juliajevi množici za R in R^N enaki.*

Izrek 7.12. *(Gosta predorbita). Predorbita $z \in \mathcal{J}$ je gosta v $\mathcal{J}$.*

Ta izrek se uporablja kot možen način za izračun $\mathcal{J}$ (inverzna iteracija). Učinkovita je za majhne stopnje, ko število praslik ne narašča prehitro.

7.1 Nariši Juliajevo množico na $f(z) = z^2 + (-0.765 + 0.12i)$.

Primer. Oglejmo si $f(z) = z^2$. Juliajeva množica je enotska krožnica na Riemannovi sferi, množica E sta pa ravno superprivlačni fiksni točki 0 in ∞. Vsaka okolica katerekoli točke iz enotske krožnice se z iterati razmaže po celotni sferi (brez 0 in ∞).

Izrek 7.13. *(Juliajeva množica je rob povezane komponente Fatoujeve množice). Vsaka neprazna popolnoma invariantna podmnožica $\mathcal{J}$ je gosta v $\mathcal{J}$. Če je D unija povezanih komponent $\mathcal{F}$, ki je popolnoma invariantna, potem je $\mathcal{J} = \partial D$.*

Izrek 7.14. *Juliajeva množica nima izoliranih točk.*

7.2 Pokaži, da ima racionalna preslikava Riemannove sfere nase, ki je reda 1, ali prazno Juliajevo množico ali pa je v njej ena točka, ki je lahko parabolična ali odbojna fiksna točka.

Posledica 7.15. *Juliajeva množica racionalne preslikave $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ stopnje vsaj 2 je ali povezana ali pa ima neštevno povezanih komponent.*

Izrek 7.16. *(Fatou- Julia). Juliajeva množica je zaprtje množice odbojnih periodičnih točk.*

3. Polinomi

Posvetili se bomo primeru, ko je $R = P$, polinom stopnje vsaj 2. Vemo, da imamo superprivlačno točko v ∞. Iterati P so omejeni na omejenih komponentah $\mathcal{F}$ (povsod na $\mathcal{F}$ so iterati normalna družina, zato morajo biti na omejenih komponentah omejeni), zato je $A(\infty)$ povezana. Njen rob je Juliajeva množica.

Napolnjena Juliajeva množica, ki jo označimo s $\mathcal{K}$, je definirana kot unija $\mathcal{J}$ in vseh omejenih povezanih komponent $\mathcal{F}$. Opazimo, da $z \in \mathcal{K}$ natanko tedaj, ko so njegovi iterati omejeni.

Naj preslikava φ konjugira P v ζ^d v okolici ∞ in naj bo oblike $\varphi(z) = z+\mathcal{O}(1)$ v okolici ∞. V poglavju 4. smo povedali, da $\log|\varphi|$ sovpada z Greenovo funkcijo $G(z) = G(z,\infty)$ za $A(\infty)$ (G ima pol v ∞). Iz funkcijske enačbe za φ dobimo funkcijsko enačbo za Greenovo funkcijo

$$G(P(z)) = dG(z),\ z \in A(\infty).$$

Polinom preslika nivojnice G nase, tako da vrednost na nivojnicah pomnoži z d. Množica $\{G > r\}$ je invariantna za P in P jo preslika kot $d \to 1$ na $\{G > rd\}$. Za velike r je $\varphi(z)$ definirana na $\{G > r\}$ in to množico preslika na $\{|\zeta| > e^r\}$ (ne pozabimo, da je $|\varphi(z)| = e^{G(z)}$). Malo drugače zapisana funkcijska enačba

$$\varphi(z) = (\varphi(P(z)))^{1/d}$$

omogoča, da φ razširimo na $\{G > r/d\}$, če seveda v tem območju ni kritične točke P.

Če v $A(\infty)$ ni nobene druge kritične točke P, lahko to nadaljujemo v neskončnost in pridemo prek konformnih preslikav območij $\{|\zeta| > e^r\}$ (ker gremo po zaporedju $r, r/d, r/d^2$... proti 0) do konformne preslikave na $\{|\zeta| > 1\}$. Množica $A(\infty)$ je enostavno povezana in Juliajeva množica je enotska krožnica.

Če imamo prvo kritično točko na nivojski množici $\{G = r\}$, se enostavno povezano območje $\{G > r\}$ še vedno konformno preslika na enostavno povezano območje $\{|\zeta| > e^r\}$, le da ima to v bližini kritične vrednosti 'špice', in se φ približuje različnim vrednostim, ko se približujemo kritični vrednosti po različnih 'špicah'. Ker je kritična, ima nivojnica vsaj dve enostavno sklenjeni krivulji, ki se sekata v kritični točki (osmice). Znotraj vsake od teh krivulj so točke Juliajeve množice, sicer bi bila G znotraj harmonična in po principu maksima konstanta. Zato $\mathcal{J}$ ni povezana. Kot smo že razložili, ima v tem primeru neskončno komponent (kritične točke so tudi vsi inverzni iterati te kritične točke, saj so kritične točke G kritične tudi za P. Dokazali smo

Izrek 7.17. *Juliajeva množica polinoma P je povezana natanko tedaj, če je edina kritična točka P, ki leži v $A(\infty)$, točka ∞ ali drugače, če je orbita vsake kritične točke v $\mathbb{C}$ omejena.*

Drug ekstrem je tale.

Izrek 7.18. *Če $P^n(q) \to \infty$ za vsako kritično točko q, potem je Juliajeva množica popolnoma nepovezana.*

Dokaz. Naj bo tak D velik odprt disk, ki vsebuje $\mathcal{J}$ da je $P(\overline{\mathbb{C}} \setminus D) \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}$. Tak obstaja, ker je ∞ privlačna točka. Naj bo N tako veli, da P^n preslika vse kritične točke P v $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$, $n \geq N$. Ker so kritične točke P^n kritične točke P in njihovih prvih $n-1$ iteratov, nimamo nobenih kritičnih točk za P^n v $P^{-n}(\overline{D})$, $n \geq N$. Če bi bila $z \in P^{-n}(\overline{D})$, $P^n(w) = z$, $w \in \overline{D}$, kritična točka za P^n, bi bila ali kritična za P ali pa bi bila $z_i = P^i(z) = P^{i+n}(w)$ kritična točka za P za $i \geq 1$. Ker je za $n > N$ in z_i kritično $P^n(z_i) \notin \overline{D}$, tudi $z_i \notin P^{-n}(\overline{D})$. Zato za $n \geq N$ preslikava $P^n : P^{-n}(\overline{D}) \to \overline{D}$ nima kritičnih vrednosti v $\overline{D}$, zato so vse inverzne veje P^{-n} definirane na $\overline{D}$ in vsaka $\overline{D}$ konformno slika nase. Naj bo $z_0 \in \mathcal{J}$. Potem je tudi $P^n(z_0) \in \mathcal{J}$ in naj bo f_n veja inverza P^n, ki preslika $P^n(z_0)$ na z_0. Zaporedje f_n je enakomerno omejeno na (privzeti smemo da kar na okolici) $\overline{D}$ (D je bil poljuben in če ni enakomerne omejenosti na okolici $\overline{D}$, ampak le na $\overline{D}$, ga lahko pa malo zmanjšamo; konstrukcija je enaka), zato je normalna družina. Za $z \in A(\infty) \cap D$ velja, da ima zaporedje inverznih iteratov $f_n(z)$ stekališče na $\mathcal{J}$, mora vsaka limitna funkcija f preslikati $A(\infty) \cap D$ v $\mathcal{J}$. Ker $\mathcal{J}$ nima odprte množice, mora biti f konstanta. Zato gre premer $f_n(\overline{D})$ proti 0. Slika $f_n(\partial D)$ in $\mathcal{J}$ sta disjunktni, zato je $\{z_0\}$ povezana komponenta $\mathcal{J}$, kar pomeni,da je $\mathcal{J}$ povsem nepovezana. $\diamondsuit$

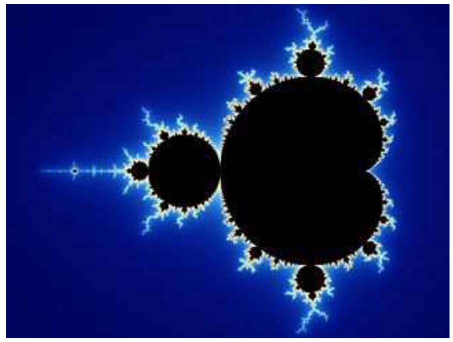
Izrek 7.19. *(Douady). Polinom stopnje d ima največ $d-1$ neodbojnih ciklov v $\mathbb{C}$.*

Mandelbrotova množica

Po zadnjih dveh izrekih vidimo, da imamo v primeru polinomov stopnje 2 samo dve množnosti: ali je Juliajeva množica povezana ali pa povsem nepovezana. Postavimo polinom P v kanonično pozicijo z linearno transformacijo $h(w) = Aw + B$. Izračunajmo $h^{-1} \circ P \circ h(z)$:

$$h^{-1} \circ P \circ h(z) = \frac{1}{A} \left(aA^2 z + (2aAB + Ab)z + aB + bB + c - B \right).$$

Najpreprostejša oblika je $z^2 + C$. Če jo želimo, dobimo $a = A^{-1}$, $B = -b/(2a)$. Zato zadošča obravnavati dinamiko polinomov $P_C(z) = z^2 + C$. Če nas zanima le, ali je Juliajeva množica enostavno povezana ali povsem nepovezana, zadošča ugotoviti, kam gredo iterati kritične točke polinoma, ki pa je 0. Vse tiste vrednosti C, za katere so iterati 0 omejeni, sestavljajo Mandelbrotovo množico. Lastnosti Mandelbrotove množice $\mathcal{M}$ so:



Slika 7.1: Mandelbrotova množica

(a) $\mathcal{M}$ je zaprta enostavno povezana podmnožica $\overline{\Delta(0,2)}$, ki seka realno os na intervalu $[-2, 1/4]$;

(b) Sestavljajo jo natanko tiste točke, za katere je $|P_c^n(0)| \leq 2$ za vsak $n \geq 1$.

Ker polinomi stopnje 2 nimajo Hermanovih kolobarjev (Shikishura: H.K. je $d-2$) ali potujočih komponent in ker imajo polinomi stopnje 2 največ en privlačen ali paraboličen cikel, imamo za $c \in \mathcal{M}$ naslednje množnosti:

(a) Polinom P_c ima privlačni cikel. Če imamo privlačno točko, imamo samo eno omejeno komponento $\mathcal{F}$. Če ima cikel dolžino 2 ali več, ima $\mathcal{F}$ neskončno komponent.

(b) Polinom P_c ima parabolični cikel. Če obstaja parabolična točka z večkratnostjo 1, imamo eno omejeno komponento $\mathcal{F}$. Če je cikel dolžine 2 ali več, imamo neskončno omejenih komponent. To se zgodi le za $c = 1/4$.

(c) Polinom P_c ima cikel Sieglovih diskov. Omejenih komponent je neskončno in vsaka se sčasoma ziterira Sieglov cikel.

(d) Fatoujeva množica nima omejenih komponent. To se zgodi npr. za $c = -2, i$.

Hausdorffova dimenzija roba Mandelbrotove množice je 2.