Dinamični sistemi - Prva domača naloga

1. Podan je sistem diferencialnih enačb $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, kjer je
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$
Določi tip ravnovesne točke v izhodišču in prostore E^N, E^S in E^C. Skiciraj in opiši fazni portret v lastni bazi. Poišči splošno rešitev nehomogenega problema $\dot{x} = Ax + f$ za $f(t) = (t, 0, e^t)$.

2. Naj bo $A^T = -A$ poševno simetrična matrika in $\vec{x}$ rešitev sistema diferencialnih enačb $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$.
   a) Pokaži, da velja
   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\vec{x}(t)|^2 = 0.$$
   b) Skiciraj fazni portret za
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$
   c) Utemelji, zakaj je za poljubno $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ fazni portret sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ linearna transformacija portreta iz točke b).

3. a) Naj bo f Lipschitzova vektorska funkcija. Pokaži, da je tudi
   $$\frac{f(\vec{x})}{1 + \|f(\vec{x})\|}$$
   Lipschitzova. Ali velja analogna trditev tudi v $\mathcal{C}^1$ kategoriji?
   b) Dokaži, da je produkt dveh omejenih Lipschitzovih funkcij tudi omejena Lipschitzova funkcija.
   c) Naj bo $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ podana s predpisom
   $$f(t,x) = \begin{cases} 2t, & x \leq 0 \\ -2t, & x > 0,\ x > t^2 \\ 2t - \frac{4x}{t}, & \text{sicer} \end{cases}$$
   Pokaži, da je f v točki $(0,0)$ zvezna, ni pa Lipshitzova v komponenti x na okolici. Pokaži, da Picardova iteracija za začetni problem $\dot{x} = f(t,x)$, $x(0) = 0$ ne konvergira.

4. Rešitev sitema $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x}, t)$ ni zvezno odvisne le od začetnih pogojev, ampak tudi od funkcije f oz. njenih parametrov. V odvisnosti od $\mu \in \mathbb{R}$ klasificiraj ravnovesne točke in skiciraj fazni portret sistemov:

   a)
$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = x^2 + \mu$$

   b)
$$\dot{x} = -y + x((x^2 + y^2 - 1)^2 - \mu)$$
$$\dot{y} = x + y((x^2 + y^2 - 1)^2 - \mu)$$

5. Podan je nelinearni sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -x_1 \\ \dot{x_2} &= -x_2 + x_3 + 2x_1x_3^2 \\ \dot{x_3} &= x_3. \end{aligned}$$

   Poišči tok sistema, ter stabilno in nestabilno mnogoterost v ravnovesni točki. Z nastavkom $H(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 + g(x_1, x_3), x_3)$ poišči homeomorfizem, ki podani sistem konjugira v linearnega.

6. Podan je sistem
$$\dot{x} = f(x, y),$$
$$\dot{y} = g(x, y),$$
   kjer sta obe funkciji gladki in $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x} < 0$ povsod na $\mathbb{R}^2$.

   a) Pokaži, da $x(t)$ in $y(t)$ po nekem času postaneta monotoni.

   b) Denimo, da sistem ponazarja razvoj dveh živalskih vrst $x, y \geq 0$. Naj bo $f(x, y) = x(a - x - ay)$, $g(x, y) = y(b - bx - y)$ za $a, b > 0$. Pokaži, da je rešitev pri poljubnih začetnih pogojih definirana za vse čase $t \geq 0$. Za katere a in b lahko z gotovostjo trdimo, da bo ena izmed vrst izumrla?

Rok za oddajo nalog je 5. maj 2014. Oddani morajo biti rokopisi v službeni predalček na Jadranski 19, Ljubljana.