Dinamični sistemi - Druga domača naloga

1. Določi in klasificiraj ravnovesne točke sistema

$$\dot{x} = y + x^2 - x(y - 1 + 2x^2)/4$$

$$\dot{y} = -2(1 + y)x.$$

   Pokaži, da sta krivulji $y = -1$ in $y = 1 - 2x^2$ invariantni in nariši fazni portret. Upoštevaj, kako se spreminja predznak odvodov $\dot{x}$ in $\dot{y}$.

2. Podan je sistem

$$\dot{x} = -2x - y^2 \qquad \dot{y} = -y - x^2.$$

   S funkcijo $V = ax^2 + by^2$ poišči čim večji $R > 0$, da bo za vsako točko na disku $p \in \mathbb{D}(0, R)$ in tok φ_t veljalo $\lim_{t\to\infty} \varphi_t(p) = (0, 0)$.

3. a) Nariši fazni potrtet in določi vse ω-limitne množice sistema

$$\dot{x} = x - x^3 \qquad \dot{y} = -y.$$

   Ali je množica $A = [-1, 1] \times \{0\}$ privlačna? Ali je atraktor?

   b) Podan je sistem

$$\ddot{x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \qquad \ddot{y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

   Denimo, da je $x(0) = \dot{x}(0) = 1$ in $y(0) = \dot{y}(0) = 0$. Pokaži, da tedaj velja $|x(t)| \leq 2$ za vsak $t \in \mathbb{R}$.

4. Pokaži, da obstaja periodična rešitev enačbe

$$\ddot{x} - \dot{x}(1 - 3x^2 - 2\dot{x}^2) + x = 0.$$

   Pokaži, da je njen presek z diskom $\mathbb{D}(0, 3/2)$ neprazen.

5. Naj bo $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, $f(z) = \frac{z}{2(1+z^2)}$. Pokaži, da Fatoujeva množice vsebuje cel disk $\mathbb{D}(0, \sqrt{1/2})$. Nasvet: Za $|z| < r < \sqrt{1/2}$ poišči oceno oblike $|f(z)| < g(r)$ in si oglej realno dinamiko funkcije $g^{(n)}(r)$.

6. Naj bo Γ periodična rešitev $\dot{x} = f(x)$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, in $s \mapsto \tilde{P}(s)$ parametrična Poincarejeva preslikava definirana v neki točki iz Γ. Denimo, da velja $\tilde{P}'(0) = 1$ in $\tilde{P}''(0) \neq 0$. Obravnavaj iteracijo $\tilde{P}^{(n)}(s)$ in pokaži, da obstajata točki $q_1, q_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma$, da je $\alpha(q_1) = \omega(q_2) = \Gamma$.

Rok za oddajo nalog je 23. junij 2014. Oddani morajo biti rokopisi v službeni predalček na Jadranski 19, Ljubljana.