Dinamični sistemi 2014 - Dodatne domače naloge

1. Dokaži trditev: Če je $f(x,t)$ zvezna na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ in enakomerno $\mathcal{O}(\|x\|)$, ko gre $\|x\| \to \infty$, je rešitev sistema $x' = f(x,t)$ definirana za vse čase. Enakomerno pomeni, da je ocena neodvisna od t.

2. Dokaži trditev: Naj bo $f(x)$ razreda $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R}^n$ in g neničelna gladka realna funkcija na $\mathbb{R}^n$. Pokaži, da imata sistema $x' = f(x)$ in $y' = f(y)g(y)$ enake tokovnice t.j. če sta x in y rešitvi sistemov pri istem zčetnem pogoju, definirata (vsaj za majhne čase) isto krivuljo, ki pa je parametrizirana na dva različna načina). Ali je gladkost g potrebna?

3. Naj bosta α in β gladki funkciji. Pokaži, da ima enačba

$$\ddot{x} + \alpha(x, \dot{x}) + \beta(x) = u(t)$$

   pri poljubnih začetnih pogojih $x(0) = x_0$ in $x'(0) = v_0$ enolično rešitev, ki je definirana za vse čase.

4. Na predavanjih ste izpustili dokaz obstoja stabilne mnogoterosti. Tega je moč najti v knjigi L. Perko: Differential equations and dynamical systems, strani 107-111. Avtor uporabi rekurzivno zaporedje $u^{(j)}$ približkov za rešitev primerne integralske enačbe in tako konstruira stabilno mnogoterost iterativno. Uporabi ta postopek na sistemu

$$\dot{x_1} = -x_1$$

$$\dot{x_2} = -x_2 + x_1^2$$

$$\dot{x_3} = x_3 + x_2^2.$$

   Pokaži, da sta člena $u^{(3)}$ in $u^{(4)}$ enaka. Določi mnogoterost $W^S(0)$.

5. Modificirajmo Lotka-Volterov model

$$\dot{x} = kx - axy - x^2,$$

$$\dot{y} = -ly + bxy - y^2$$

   Naj velja $l > bk$. Pokaži, da za poljubno začetno stanje $x, y > 0$ vrsta y po nekem času začne izumirati (konvergira k nič) vendar ne izumre v končnem času. Kaj se dogaja z vrsto x?

6. Pokaži, da tok Hamiltonskega sistema ohranja prostornino, t.j. volumen odprte množice $E \subset \mathbb{R}^{2n}$ in $\phi_t(E)$ sta enaki za vsak $t \geq 0$.

7. Pokaži, da gradientni sistem nima nekonstantne rešitvene krivulje z lastnostjo: za x_0 obstaja zaporedje (t_n), da $t_n \to \infty$ in $\phi_{t_n}(x_0) \to x_0$.

8. Podan je sistem
$$\dot{x} = 8 - x + x^2 y,$$
$$\dot{y} = \frac{1}{2} - x^2 y$$
in konveksen štirikotnik
$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x \geq \frac{1}{16},\ 0 \leq y \leq 128,\ x + y \leq 130\right\}.$$
Dokaži, da ima sistem netrivialno periodično rešitev v S.

9. Imejmo dva ravninska diferencialna sistema $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x})$ in $\dot{\vec{x}} = g(\vec{x})$, za katera velja $f(\vec{x})^T g(\vec{x}) = 0$ za vsak $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Denimo, da ima eden od sistemov netrivialno periodično rešitev. Pokaži, da ima tedaj drugi vsaj eno ravnovesno točko.

10. Naj bo $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ in $\dot{x} = f(x)$. Na vajah smo navedli dva zadostna pogoja za stabilnost T-periodična rešitve γ. In sicer, da so realne deli neničelnih lastnih vrednosti matrike B iz Floquetovega razcepa toka lineariziranega sistema negativne oz. da je
$$\exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{div}(f(\gamma(t))dt\right) < 1.$$
Pokaži, da sta oba pogoja ekvivalentna.

Naloge morajo biti oddane po elektronski pošti. Ocenjene bodo prve tri rešitve, ki bodo prispele do roka prvega pisnega izpita.