Dodatne naloge

26.5. 2014

1. naloga

Dokaži, da so Möbiusove transformacije (MT) grupa za komponiranje. Dokaži, da za katerikoli nabor različnih točk a, b, c obstaja natanko ena MT, ki preslika a v 1, b v 0 in c v ∞. Pokaži, da je vsaka biholomorfna preslikava Riemannove sfere nase Möbiusova transformacija.

Vsaki MT $f(z) = (az+b)/(cz+b)$ lahko priredimo matriko

$$[\ {}^{a^b}_{c^d}\ ].$$

Pokaži, da vsaki matriki A, B, za kateri velja $A = cB$ za $c \neq 0$ določata isto MT. Najprej pokaži, da je komponiranje ekvivaletnto množenju ustreznih matrik. Pokaži, da je grupa MT izomorfna

$$GL(2,\mathbb{C})/(\mathbb{C}\setminus\{0\}) =: PGL(2,\mathbb{C}) \cong PSL(2,\mathbb{C}) := SL(2,\mathbb{C})/(\pm 1).$$

Obravnavaj dinamiko Möbiusovih transformacij. Določi fiksne točke, jih klasificiraj, določi območja privlačnosti in opiši dinamiko. Nasvet: Najprej pokaži, da smeš privzeti, da je ena fiksna točka ∞.

2. naloga

a) Naj bo $P(z) = az^2 + bz + c$ polinom in $g(z) = z - P(z)/P'(z)$. S primerno konjugacijo pokaži, da je g ali kvadriranje ali linearna preslikava. Določi njene fiksne točke in jih klasificiraj. Določi območja privlačnosti fiksnih točk.

b) Naj bo $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ holomorfna preslikava s fiksno točko 0 in $f(z) = \lambda z^p g(z)$, $g(0), \lambda \neq 0$. Pokaži, da je konjugacijska preslikava (če obstaja), ki f konjugira v λz^p, določena do skalarnega množenja natanko, če je $p = 1$ in λ ni koren enote.

3. naloga

(Montelov izrek) Naj bo $\mathcal{F} = \{f, f : D \to \mathbb{C}\}$ družina holomorfnih funkcij, definiranih na odprti množici D, ki je na D omejena s konstanto M: $f(D) \subset B(0, M)$ za vsak $f \in \mathcal{F}$. Pokaži, da ima vsako zaporedje funkcij iz te množice konvergentno podzaporedje (v smislu enakomerne konvergence po kompaktih). Nasvet: pokaži, da so odvodi lokalno enakomerno omejeni z uporabo Cauchyjevega integrala.