2. izpit iz predmeta FUNKCIONALNA ANALIZA

2. 4. 2012

(1) Izračunaj normo operatorja $T : \mathcal{C}[-1,1] \to \mathcal{C}[-1,1]$, definiranega s predpisom

$$(Tf)(x) = (x^2 - x)f(x).$$

Klasificiraj njegov spekter.

(2) Naj bo T obrnljiv operator na Banachovem prostoru X.

(a) Dokaži, da je

$$\sigma(T^{-1}) = \left\{ \frac{1}{z} : z \in \sigma(T) \right\}.$$

(b) Dokaži, da je

$$\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

če je $\sup\{\|T^n\| : n \in \mathbb{Z}\} < \infty$.

(3) Naj bo X Banachov prostor in $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ števni podmnožici v $\mathcal{B}(X)$. Naj za vsak $x \in X$ obstajata taka operatorja $T \in \mathcal{F}$ in $S \in \mathcal{G}$, da je $Tx = Sx$. Dokaži, da je $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

(4) Naj bo $A : X \to Y$ surjektiven omejen linearen operator med Banachovima prostoroma X in Y.

(a) Dokaži, da obstaja taka konstanta $M > 0$, da za vsak $y \in Y$ obstaja vsaj en vektor $x \in X$, za katerega velja $Ax = y$ in $\|x\| \leq M\|y\|$.

(b) Naj bo $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v Y, ki konvergira proti 0. Dokaži, da obstaja tako zaporedje $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v X, ki konvergira proti 0 in za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $Ax_n = y_n$.

(5) Na Banachovem prostoru l^1 definiramo množenje po komponentah: za $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^1$ in $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l^1$ je $x \circ y = (x_1y_1, x_2y_2, \ldots)$. Dokaži, da dobimo Banachovo algebro. Določi vse njene maksimalne ideale in pripadajoče karakterje!