1. izpit iz predmeta FUNKCIONALNA ANALIZA

7. 2. 2012

(1) Na Banachovem prostoru l^1 je podan operator T s predpisom

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i, \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\infty} x_i, \frac{1}{2^2} \sum_{i=3}^{\infty} x_i, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=n}^{\infty} x_i, \ldots \right).$$

(a) Izračunaj normo $\|T\|$.
(b) Ali je T injektiven?
(c) Izračunaj adjungirani operator T^* operatorja T.

(2) Naj bo $T : X \to Y$ izomorfizem med normiranima prostoroma X in Y. Dokaži, da T preslika ekstremne točke poljubne konveksne množice $K \subseteq X$ v ekstremne točke konveksne množice $T(K) \subseteq Y$. Ali sta realna Banachova prostora $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[0, 1]$ in $l^\infty_{\mathbb{R}}$ izometrično izomorfna? Odgovor dobro utemelji!

(3) Na normiranem prostoru c_{00} (vseh vektorjev $x \in l^\infty$, ki imajo končno mnogo neničelnih komponent) je podano zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ linearnih funkcionalov s predpisom $f_n(x_1, x_2, \ldots) = nx_n$.
(a) Dokaži, da je za vsak $x \in c_{00}$ zaporedje vektorjev $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno.
(b) Ali je zaporedje $\{\|f_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno?
(c) Ali je to v protislovju z izrekom o enakomerni omejenosti? Natančno navedi ta izrek!

(4) Naj bosta X in Y Banachova prostora in $A : X \to Y$ omejen linearen operator z zaprto sliko. Dokaži, da obstaja taka konstanta $c > 0$, da za vsak $x \in X$ velja

$$\|Ax\| \geq c \cdot d(x, \ker A).$$

(5) Naj bo $\mathcal{A}$ kompleksna Banachova algebra z enoto. Dokaži, da so naslednje trditve ekvivalentne:
(a) $\|a^2\| = \|a\|^2$ za vsak $a \in \mathcal{A}$;
(b) $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$ za vsak $a \in \mathcal{A}$ in vsak $n \in \mathbb{N}$;
(c) $r(a) = \|a\|$ za vsak $a \in \mathcal{A}$.