3. izpit iz predmeta FUNKCIONALNA ANALIZA

12. 9. 2012

(1) Na Banachovem prostoru $\mathcal{C}[0,1]$ je definirana preslikava A s predpisom

$$(Af)(x) = (x - x^2) \int_0^x f(t)dt.$$

(a) Dokaži, da je A dobro definiran omejen linearen operator in izračunaj njegovo normo.

(b) Ali je operator A injektiven?

(c) Ali je operator A obrnljiv?

(2) Naj za vektorja x in y normiranega prostora velja $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$. Dokaži, da za poljubni nenegativni števili α in β velja

$$\|\alpha x + \beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\|.$$

(3) Naj zaporedje $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ normiranega prostora X konvergira v šibki topologiji proti vektorju x in naj zaporedje norm $\{\|x_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira proti številu $c \in (0,\infty)$. Dokaži, da je $\|x\| \leq c$. S primerom pokaži, da lahko velja $\|x\| < c$.

(4) Naj bo X kompleksen Banachov prostor in $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno zaporedje linearnih operatorjev na X. Dokaži, da za vsak neničeln omejen linearen operator S na X obstaja tak vektor $x \in X$, da divergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}(T_n - nS)x.$$

(5) Naj bo a element Banachove algebre $\mathcal{A}$ z enoto in naj bo λ tako kompleksno število, da je $|\lambda| > r(a)$. Dokaži, da vrsta

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}$$

konvergira in je enaka inverzu elementa $\lambda - a$.