Domača naloga iz Funkcionalne analize

Rešitve oddajte do 23.4.2014 v moj predalček ali po elektronski pošti na naslov marko.kandic@fmf.uni-lj.si. Dovoljena je uporaba dostopne literature v knjižnjici ali na spletu. Sodelovanje s kolegi je prepovedano. Vse odgovore dobro utemeljite!

1. Na Banachovem prostoru $\mathcal{C}[0,1]$ je definirana preslikava A s predpisom
$$(Af)(x) = (x - x^2)\int_0^x f(t)dt.$$
   (a) Dokaži, da je A dobro definiran omejen linearen operator in izračunaj njegovo normo.
   (b) Ali je operator A injektiven?
   (c) Ali je operator A obrnljiv?

2. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor, $1 \leq p < \infty$ in $A \subseteq X$ merljiva podmnožica v X. Definirajmo
$$L^p(A) = \{f \in L^p(X): \ f = 0 \text{ skoraj povsod na } A^c\}.$$
   (a) Dokaži, da je $L^p(A)$ zaprt podprostor v $L^p(X)$.
   (b) Kateremu prostoru je izometrično izomorfen $L^p(X)/L^p(A)$?

3. Naj za vektorja x in y normiranega prostora velja $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. Dokaži, da za poljubni nenegativni števili α in β velja
$$\|\alpha x + \beta y\| = \alpha\|x\| + \beta\|y\|.$$

4. Na normiranem prostoru c_{00} (vseh vektorjev $x \in l^\infty$, ki imajo končno mnogo neničelnih komponent) je podano zaporedje $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ linearnih funkcionalov s predpisom
$$f_n(x_1, x_2, \ldots) = nx_n$$
.
   (a) Dokaži, da je za vsak $x \in c_{00}$ zaporedje vektorjev $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno.
   (b) Ali je zaporedje $\{\|f_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ omejeno?
   (c) Ali je to v protislovju z izrekom o enakomerni omejenosti?

5. Naj bo X Banachov prostor in $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ števni podmnožici v $\mathcal{B}(X)$. Naj za vsak $x \in X$ obstajata taka operatorja $T \in \mathcal{F}$ in $S \in \mathcal{G}$, da je $Tx = Sx$. Dokaži, da je $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.

6. Naj bo $A : X \to Y$ surjektiven omejen linearen operator med Banachovima prostoroma X in Y.
   (a) Dokaži, da obstaja taka konstanta $M > 0$, da za vsak $y \in Y$ obstaja vsaj en vektor $x \in X$, za katerega velja $Ax = y$ in $\|x\| \leq M\|y\|$.
   (b) Naj bo $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje v Y, ki konvergira proti 0. Dokaži, da obstaja tako zaporedje $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ v X, ki konvergira proti 0 in za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja $Ax_n = y_n$.