

# DOMAČA NALOGA IZ FUNKCIONALNE ANALIZE

Rešitve oddajte do 13.6.2014 v moj predalček ali po elektronski pošti na naslov marko.kandic@fmf.uni-lj.si. Dovoljena je uporaba dostopne literature v knjižnici ali na spletu. Sodelovanje s kolegi je prepovedano. Vse odgovore dobro utemeljite!

1. Naj bo  $\mathcal{H}$  Hilbertov prostor in  $A, B$  taki preslikavi (ne nujno linearni) na  $\mathcal{H}$ , da za vse  $x, y \in \mathcal{H}$  velja

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle.$$

- (a) Dokaži, da sta  $A$  in  $B$  linearni preslikavi.  
(b) Dokaži, da sta  $A$  in  $B$  omejeni in velja  $A^* = B$ .
2. Naj zaporedje  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  normiranega prostora  $X$  konvergira v šibki topologiji proti vektorju  $x$  in naj zaporedje norm  $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$  konvergira proti številu  $c \in (0, \infty)$ . Dokaži, da je  $\|x\| \leq c$ . S primerom pokaži, da lahko velja  $\|x\| < c$ .
3. Za Banachova prostora  $c_0$  in  $c$  določi vse ekstremne točke zaprte enotske krogle! Ali sta prostora  $c_0$  in  $c$  izometrično izomorfna? Ali sta prostora  $c_0$  in  $c$  topološko izomorfna? Odgovora utemelji!
4. Naj bo  $K$  kompakten povezan Hausdorffov topološki prostor, ki ni singleton in  $C_{\mathbb{R}}(K)$  realna Banachova algebra vseh realnih zveznih funkcij na  $K$  glede na supremum normo. Ali je  $C_{\mathbb{R}}(K)$  dual kakega Banachovega prostora? Odgovor utemelji!

5. Naj bo  $\mathcal{A}$  kompleksna Banachova algebra z enoto. Dokaži, da so naslednje trditve ekvivalentne:

- (a)  $\|a^2\| = \|a\|^2$  za vsak  $a \in \mathcal{A}$ ;  
(b)  $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$  za vsak  $a \in \mathcal{A}$  in vsak  $n \in \mathbb{N}$ ;  
(c)  $r(a) = \|a\|$  za vsak  $a \in \mathcal{A}$ .

6. Naj bo  $T$  obrnljiv operator na Banachovem prostoru  $X$ .

- (a) Dokaži, da je

$$\sigma(T^{-1}) = \left\{ \frac{1}{z} : z \in \sigma(T) \right\}.$$

- (b) Dokaži, da je

$$\sigma(T) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

če je  $\sup\{\|T^n\| : n \in \mathbb{Z}\} < \infty$ .