Spekter grafov I

R. Škrekovski
5. maj 2014

Matrike grafov

Naj bo G graf z množico vozlišč $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$ in množico povezav $E = \{e_1, ..., e_m\}$.

Matrika sosednosti grafa G je

$$A(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

pri čemer velja

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \backsim v_j, \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Laplaceovo matriko L grafa G definiramo:

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij} & \text{za } i \neq j \\ \deg(v_i) & \text{sicer.} \end{cases}$$

Absolutno Laplaceovo matriko $|L|$ definiramo:

$$s_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{za } i \neq j \\ \deg(v_i) & \text{sicer.} \end{cases}$$

Za vsoto po i-ti vrstici (ali stolpcu) velja

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \deg(v_i)$,

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} l_{ij} = 0$,

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} s_{ij} = 2\deg(v_i)$.

Matriko stopenj točke D grafa G definiramo:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{za } i \neq j \\ \deg(v_i) & \text{sicer.} \end{cases}$$

Torej,

$$L = D - A$$

in

$$|L| = D + A\,.$$

Karakteristični polinom in spekter grafa

Karakteristični polinom matrike M velikosti $n \times n$ je definiran kot

$$p_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M).$$

Ničle tega polinoma tvorijo spekter matrike M in ga označimo z $\mathrm{Spec}(M)$. Lastni vrektorji za posamezno lastno vrednost λ so rešitve $x \neq 0$ enačbe

$$Mx = \lambda x.$$

Za poljubni graf G

- **(navadni) spekter** je spekter matrike $A(G)$;
- **Laplaceov spekter** je spekter matrike $L(G)$;
- **absolutno Laplaceov spekter** je spekter matrike $|L|(G)$.

Množico lastnih vrednosti označimo kar z $\mathrm{Spec}(A(G))$, $\mathrm{Spec}(L(G))$, $\mathrm{Spec}(|L|(G))$.

Namesto lastne vrednosti matrike $A(G)$ bomo rekli kar lastne vrednosti grafa G. Lastne vrednosti običajno razvrstimo v nenaraščajočem vrstnem redu:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$

To množico lastnih vrednosti označimo tudi z $\mathrm{Spec}(G)$.

Lastne vektorje lahko obravnavamo kot utežene funkcije na točkah. Namreč, naj bo G graf na n točkah, x neničelen vektor dimenzij n in λ realno število. Potem velja, da je λ *lastna vrednost in* x *ustrezni lastni vektor grafa* G *natanko takrat, ko za vsako točko* v_i *grafa* G *velja*

$$\lambda x_i = \sum_{v_j \in N(v_i)} x_j \,.$$

Ta opis neposredno sledi iz zveze $Ax = \lambda x$.

Zgled.

Orodja iz linearne algebre

Trditev. *Realna simetrična matrika ima vse lastne vrednosti realne.*

Dokaz. Naj bo A taka matrika in naj bo $\lambda = a + bi$ kompleksna lastna vrednost in x ustrezni lastni vektor. Potem je $\overline{\lambda} = a - bi$ tudi lastna vrednost, saj

$$A\overline{x} = \overline{Ax} = \overline{\lambda x} = \overline{\lambda}\overline{x}\,.$$

Obravnavajmo

$$Ax = \lambda x \quad \text{in} \quad A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}.$$

Z leve strani prvo zmnožimo z $\overline{x}^\top$ in drugo z $x^\top$ ter dobimo

$$\overline{x}^\top Ax = \overline{x}^\top \lambda x \quad \text{in} \quad x^\top A\overline{x} = x^\top \overline{\lambda}\overline{x}.$$

Levi strani obeh enakosti sta enaki

$$x^\top A\overline{x} = (x^\top A\overline{x})^\top = \overline{x}^\top A^\top x = \overline{x}^\top Ax.$$

Od tukaj sklepamo

$$\overline{x}^\top \lambda x = x^\top \overline{\lambda}\overline{x}$$

oziroma

$$\lambda\overline{x}^\top x = \overline{\lambda} x^\top \overline{x}.$$

Ker

$$\overline{x}^\top x = x^\top \overline{x} > 0,$$

in od tukaj sklepamo, da je

$$\lambda = \overline{\lambda}$$

kar je protislovje. ∎

Trditev. *Naj bo A poljubna kvadratna matrika. Potem*

- *veljata zvezi*
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{sl}(A) \quad \textit{in} \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A)$$
- *število neničelnih lastnih vrednosti je enako* $\mathrm{rang}(A)$,
- *lastna vektorja dveh različnih lastnih vrednosti sta ortogonalna.*

Naj bo G enostaven neusmerjen graf z n točkami. Velja

- A je realna in simetrična in zato so vse lastne vrednosti realne.
- A ima ničelno diagonalo in je zato $\mathrm{sl}(A) = 0$, tj. vsota lastnih vrednosti je enaka nič.

Podobno velja za Laplaceovo matriko

- L je realna in simetrična, tako da je Laplaceov spekter realen.
- Ker je L pozitivna semidefinitna, si lahko lastne vrednosti označimo z $\mu_1, \ldots, \mu_n$, kjer je
$$0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n.$$
- Vsota teh lastnih vrednosti je enaka $\mathrm{sl}(L)$, kar je dvakrat toliko kot število povezav v G.

Tudi $|L|$ ima realni spekter in nenegativne lastne vrednosti (ampak ni nujno singularna). Velja,
$$\mathrm{sl}(|L|) = \mathrm{sl}(L).$$

Spekter polnega grafa

Trditev. *Spekter polnega grafa K_n je*

$$(n-1)^1, (-1)^{n-1}.$$

Dokaz. Matrika sosednosti grafa K_n je enaka

$$A = J - I$$

Naj bodo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti matrike A, urejene nenaraščajoče.

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\lambda I - A) \\ &= \det(\lambda I - J + I) \\ &= \det((\lambda + 1)I - J) \\ &= \det(\lambda' I - J). \end{aligned}$$

Naj bo

$$\lambda' = \lambda + 1.$$

Tako problem prevedemo na iskanje spektra λ' matrike J.

Ker je $\text{rang}(J) = 1$, sledi da je prva lastna vrednost $\lambda_1' \neq 0$ in vsaka druga $\lambda_i = 0$ za $i \geq 2$. Iz

$$\sum_i \lambda_i' = n$$

sklepamo, da je $\lambda_1' = n$ in od tukaj

$$\text{Spec}(J) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}.$$

Iz tega sledi, da

$$\text{Spec}(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}.$$

∎

Laplaceov spekter polnega grafa

Trditev. *Spekter Laplaceove matrike polnega grafa K_n je*

$$0^1, n^{n-1}.$$

Dokaz. Iz

$$L = D - A = (n-1)I - J + I = nI - J$$

dobimo

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\mu I - L) \\ &= \det(\mu I - nI + J) \\ &= \det((\mu - n)I + J) \\ &= (-1)^n \det((n-\mu)I - J) \\ &= (-1)^n \det(\lambda' I - J). \end{aligned}$$

Vpeljemo zvezo

$$\lambda' = n - \mu.$$

Ker je

$$\mathrm{Spec}(J) = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$$

dobimo

$$\mathrm{Spec}(L) = \begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & n-1 \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Opomba: Spekter lahko izračunamo tudi direktno, ker za k-regularne grafe velja zveza $\mu_i = k - \lambda_i$.

Spekter polnih dvodelnih grafov

Trditev. *Spekter polnega dvodelnega grafa $K_{m,n}$ je*

$$\pm\sqrt{mn}, 0^{m+n-2}.$$

Dokaz. Matrika sosednosti grafa $K_{m,n}$ je

$$A = \begin{bmatrix} O_{m,m} & J_{m,n} \\ J_{n,m} & O_{n,n} \end{bmatrix}$$

Velja $\mathrm{rang}(A) = 2$, saj imamo samo dve različni vrstici in od tod samo dve lastni vrednosti različni od 0. Ker je $\mathrm{sl}(A) = 0$ in zato je vosta lastnih vrednosti nič, ena od teh dveh naj bo λ in druga $-\lambda$. Če je

$$Ax = \lambda x$$

potem hitro sledi, da je

$$x = [\underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{m}, \underbrace{\beta, \ldots, \beta}_{n}]^\top.$$

Zdaj iz

$$[\underbrace{n\beta, \ldots, n\beta}_{m}, \underbrace{m\alpha, \ldots, m\alpha}_{n}]^\top = Ax = \lambda x = [\underbrace{\lambda\alpha, \ldots, \lambda\alpha}_{m}, \underbrace{\lambda\beta, \ldots, \lambda\beta}_{n}]^\top$$

dobimo

$$n\beta = \lambda\alpha \quad \text{in} \quad m\alpha = \lambda\beta$$

in rešimo

$$\lambda = \pm\sqrt{mn}.$$

Torej je spekter polnega dvolenega grafa $K_{m,n}$

$$\mathrm{Spec}(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} \sqrt{mn} & 0 & -\sqrt{mn} \\ 1 & n-2 & 1 \end{pmatrix}$$

■

Spekter regularnih grafov

V k-regularnem grafu ima njegova matrika sosednosti A vsoto vseh elementov poljubne vrstice ali stolpca enako k. Za Lapalaceovo pa velja $L = kI - A$.

Trditev. *Če je G k-regularen graf, potem velja*

1. *k je lastna vrednost;*
2. *Za vsako lastno vrednost λ velja $|\lambda| \leq k$.*

Dokaz. Naj bo $u = [1, 1, \ldots, 1]^\top$. Potem velja

$$Au = ku,$$

kar implicira prvo trditev.

Naj bo λ poljubna lastna vrednost grafa G in y ustrezni lastni vektor. Naj bo y_j komponenta z največjo absolutno vrednostjo. Iz $Ay = \lambda y$ dobimo

$$(Ay)_j = \sum_{v_i \in N(v_j)} y_i = \lambda y_j.$$

Potem

$$|\lambda||y_j| = |\sum_{v_i \in N(v_j)} y_i| \leq \sum_{v_i \in N(v_j)} |y_i| \leq k|y_j|.$$

In od tukaj dobimo, da je

$$|\lambda| \leq k.$$

■

Laplaceov spekter regularnih grafov

Trditev. *Če ima G lastne vrednosti $k = \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ in Laplaceove lastne vrednosti $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_n$, potem je*

$$\lambda_i = k - \mu_i$$

za $i = 1, \ldots, n$.

Dokaz. Vemo, da je $L = D - A = kI - A$. Od tukaj

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\mu I - L) \\ &= \det(\mu I - kI + A) \\ &= \det((\mu - k)I + A) \\ &= (-1)^n \det((k - \mu)I - A) \\ &= (-1)^n \det(\lambda I - A). \end{aligned}$$

Od tukaj dobimo, da je

$$\mu_i = k - \lambda_i$$

in tako tudi velja

$$0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n.$$

Iz $\lambda_1 = k$, sledi da je $\mu_1 = 0$. ∎

Absolutni Laplaceov spekter regularnih grafov

Trditev. *Lastne vrednosti matrike* $|L| = kI + A$ *so*

$$2k, k + \lambda_2, ..., k + \lambda_n.$$

Dokaz. Velja $|L| = D + A$ in od tukaj

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\beta I - |L|) \\ &= \det(\beta I - D - A) \\ &= \det(\beta I - kI - A) \\ &= \det((\beta - k)I - A) \\ &= \det(\lambda I - A). \end{aligned}$$

Od tukaj dobimo, da je

$$\beta_i = k + \lambda_i$$

in tako tudi velja

$$\beta_1 = 2k.$$

■