1 Naloge iz molekularnih deskriptorjev

1.1. *Pravimo, da je matrika A* cirkulantna *če i-to vrstico matrike A dobimo tako, da prvo vrstico $(i-1)$-krat ciklično pomaknemo.*

a) *Navedi kakšen primer cirkulantne matrike.*

b) *Določi lastne vrednosti za cirkulantno $n \times n$ matriko W_n, katere prva vrstica je $[0, 1, \ldots, 0]$. (Namig. Karakteristični polinom)*

c) *Naj bo A neka poljubna cirkulantna matrika katere prva vrstica je $[a_1, \ldots, a_n]$. Izrazi A s pomočjo potenc matrike W_n.*

d) *Določi lastne vrednosti za matriko A definirano v prejšni točki.*

1.2. *Določi spekter za polne grafe K_n in cikle C_n.*

1.3. *Naj bo G nek graf z množico vozlišč $\{v_1, \ldots, v_n\}$ in $A = (a_{i,j})$ njegova matrika sosednosti. T.j*

$$[A]_{i,j} := a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{če } v_i \sim v_j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Pokaži, da je $[A^k]_{i,j}$ število sprehodov dolžine k med v_i in v_j.

1.4. *Naj bo G nek enostaven graf. Predlagaj algoritem za računanje števila trikotnikov v grafu. Kakšna je časovna kompleksnost algoritma na osnovi te zveze?*

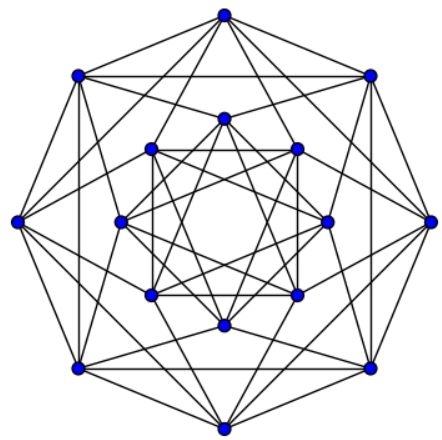
1.5. *Naj bo G nek graf reda n in A njegova matrika sosednosti. Pokaži, da je G povezan če in samo če $(A+I)^{n-1}$ nima neničelnega elementa.*

1.6. *Najdi zvezo med številom 4-ciklov grafa G in njegovo matriko sosednosti.*

Definicija 1. *k-regularnemu grafu reda v pravimo (v, k, λ, μ)-krepko regularen če*

- *poljuben par sosednjih vozlišč ima λ skupnih sosedov,*
- *poljuben par nesosednjih vozlišč ima μ skupnih sosedov.*

Hkrati predpostavljamo še, da K_n in $\overline{K_n}$ nista krepko regularna grafa.



Slika 1: Ali je graf na sliki krepko regularen?

1.7. *V tej nalogi obravnavamo krepko regularne grafe.*

a) *Poišči kakšen krepko regularen graf.*

c) *Za graf na sliki 1 določi ali je krepko regularen in če je, njegove parametre.*

b) *Pokaži, da za (v, k, λ, μ) krepko regularen graf velja*

$$(v - k - 1)\mu = k(k - \lambda - 1).$$

1.8. *Naj bo A neka simetrična matrika in v, w lastna vektorja za dve različni lastni vrednosti λ, μ matrike A. Pokaži, da sta tedaj v in w ortogonalna.*

1.9. *Naj bo G nek (v, k, λ, μ) krepko regularen graf.*

- *Pokaži zvezo*
$$A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - k)I = \mu J.$$
- *Določi lastne vrednosti za G.*

1.10. *Naj $\tau(G)$ označuje število vpetih dreves nekega grafa G.*

a) *Izračunaj $\tau(G)$ za graf na tabli.*

b) *Naj bodo* G_1, G_2 *bloka grafa* G. *Pokazi, da je* $\tau(G) = \tau(G_1)\tau(G_2)$.

c) *Pokazi zvezo* $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G/e)$.

1.11. *Poišči število vpetih dreves v Petersenovem grafu.*

1.12. *Naj bo* L *Laplasova matrika za Petersenov graf. Označimo z* L' *matriko, ki jo dobimo tako, da iz* L *odstranimo poljuben stolpec in poljubno vrstico. Izračunaj* $|\det(L')|$.

1.13. *Dokazi zgornjo ugotovitev. Pokazi torej, da ce je* L *Laplasova matrika za nek graf* G *potem je* $\tau(G) = |\det(L')$ *pri cemer je* L' *matrika dobljena iz* L *z odstranitivijo poljubne vrstice in stolpca.*