1 Naloge iz spektralne teorije grafov

1.1. *Izračunaj lastne vrednosti za naključne dvodelne grafe. Kaj opazis? Dokazi trditev.*

Opomba 1. *Velja tudi obrat zgornje trditve.*

1.2. *Za nek graf G z n vozlišči, m povezavami in c povezanimi komponentami definiramo* rang G *kot*

$$r(G) = n - c$$

in ko-rank *kot*

$$s(G) = m - n + c.$$

Naj bo G nek graf katerega povezane komponente sestavljajo cikli in drevesa.

a) *Kako lahko izraziš $s(G)$?.*

b) *Naj bodo vsa drevesa v G enaka K_2 in naj bo $k(G)$ število ciklov sode dolzine v G. Pokazi, da je tedaj $(-1)^{k(G)} = (-1)^{r(G)}$.*

1.3. *Naj bo A matrika sosednosti za graf G.*

a) *Najdi interpretacijo za* $\det(A)$. *(Namig. Definicija determinante)*

b) *Kaj predstavlja* $\det(A)$ *če je G drevo?*

Opomba 2. *Nekaj na tabli.*

1.4. *S pomočjo zgornje opombe izračunaj lastne vrednosti za $K_{n,m}$.*

1.5. *Naj ima G liho ozino $2r + 1$. Kaj lahko poveš o koeficientih G?*

1.6. *V tej nalogi obravnavamo minimalno lastno vrednost za grafe povezav.*

a) *Za naključne grafe na 10,12,13, 14 vozliščih izračunaj njihovo minimalno lastno vrednost.*

b) *Ponovi a) del pri čemer iz naključnih grafov ustvariš graf povezav. Kaj opaziš?*

c) *Ali ta lastnost velja za vse grafe povezav za grafe do 8 vozlišč?*

1.7. *V tej nalogi dokažemo lastnost, ki smo jo opazili pri prejšnji nalogi. Naj bo G graf s povezavami $e_1, \ldots, e_m$ in vozlišči $v_1, \ldots, v_m$. Naj bo $X(G)$ matrika dimenzije $n \times m$ indeksirana z pari (v_i, e_j) pri čemer je $[X(G)]_{i,j} = 1$ če je v_i incidenčen z e_j in 0 sicer.*

a) *Za nek konkreten graf na 9 vozliščih, zapiši $X(G)$.*

b) *Pokaži zvezo*
$$X(G)^t X(G) = A(L(G)) + 2I.$$

c) *$X(G)^t X(G)$ je pozitivna semidefinitna matrika. Kaj zaključiš?*

1.8. *Ali dobljena lastnost grafov povezav karakterizira slednje grafe?*

Opomba 3. *Naj bo G nek r-regularen graf katerega lastne vrednosti so $r, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. Tedaj so $2r-2, r-2+\lambda_1, \cdots, 2r-2+\lambda_{n-1}, -2$ lastne vrednosti za $L(G)$, pri čemer je kratnost zadnje lastne vrednosti $\frac{rn}{2} - r$.*

1.9. *Naj $\tau(G)$ označuje število vpetih dreves nekega grafa G.*

a) *Izračunaj $\tau(G)$ za graf na tabli.*

b) *Naj bodo G_1, G_2 bloka grafa G. Pokazi, da je $\tau(G) = \tau(G_1)\tau(G_2)$.*

c) *Pokazi zvezo $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G/e)$.*

1.10. *Poišči število vpetih dreves v Petersenovem grafu.*

1.11. *Naj bo L Laplasova matrika za Petersenov graf. Označimo z L' matriko, ki jo dobimo tako, da iz L odstranimo poljuben stolpec in poljubno vrstico. Izračunaj $|\det(L')|$.*

1.12. *Dokaži zgornjo ugotovitev. Pokaži torej, da če je L Laplasova matrika za nek graf G potem je $\tau(G) = |\det(L')|$ pri cemer je L' matrika dobljena iz L z odstranitivijo poljubne vrstice in stolpca.*