1 Naloge iz spektralne teorije grafov

1.1 Splošne naloge

1.1. *Izračunaj lastne vrednosti za* $K_{n,m}$.

1.2. *Naj ima* G *liho ožino* $2r+1$. *Kaj lahko poveš o koeficientih karakterističnega polinoma grafa* G?

1.3. *V tej nalogi obravnavamo minimalno lastno vrednost za grafe povezav.*

a) *Za naključne grafe na* 10,12,13, 14 *vozliščih izračunaj njihovo minimalno lastno vrednost.*

b) *Ponovi a) del pri čemer iz naključnih grafov ustvariš graf povezav. Kaj opaziš?*

c) *Ali ta lastnost velja za vse grafe povezav za grafe do 8 vozlišč?*

1.4. *V tej nalogi dokažemo lastnost, ki smo jo opazili pri prejšnji nalogi. Naj bo* G *graf s povezavami* $e_1, \ldots, e_m$ *in vozlišči* $v_1, \ldots, v_m$. *Naj bo* $X(G)$ *matrika dimenzije* $n \times m$ *indeksirana z pari* (v_i, e_j) *pri čemer je* $[X(G)]_{i,j} = 1$ *če je* v_i *incidenčen z* e_j *in* 0 *sicer.*

a) *Za nek konkreten graf na* 6 *vozliščih, zapiši* $X(G)$.

b) *Pokaži zvezo*
$$X(G)^t X(G) = A(L(G)) + 2I.$$

c) $X(G)^t X(G)$ *je pozitivna semidefinitna matrika. Kaj zaključiš?*

1.5. *Ali dobljena lastnost grafov povezav karakterizira slednje grafe?*

Opomba 1. *Naj bo* G *nek* r*-regularen graf katerega lastne vrednosti so* $r, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$. *Tedaj so* $\lambda_1 + r - 2, \ldots, \lambda_n + r - 2, -2$ *lastne vrednosti za* $L(G)$, *pri čemer je kratnost zadnje lastne vrednosti* $\frac{rn}{2} - r$.

1.2 Nekaj o krepko regularnih grafih

1.6. *Naj bo* G *nek* (v, k, λ, μ) *krepko regularen graf. Določi kratnosti za lastne vrednosti* G.

1.7. *Naj bo* G *nek* k*-regularen graf diametra* 2 *in ožine* 5. *Pokaži, da takšen graf obstaja le če je* $k \in \{2, 3, 7, 57\}$. *Namig - pokaži, da je* G *krepko regularen.*

1.3 Prepletanje

Definicija 1. *Pravimo, da zaporedje* $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ prepleta *zaporedje* $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_m$ *($m \leq n$), če je*

$$\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i}, \quad \textit{za} \quad i = 1, \ldots, m.$$

Definicija 2. *Naj bo A neka $n \times n$ matrika in $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Matriko, ki jo dobimo tako, da iz A odstranimo vrstice in stolpce indeksirane z I pravimo* glavna *podmatrika.*

1.8. *a) Ali zaporedje* $5, 4, 2, 1, -8, -13$ *prepleta zaporedje* $3, 2, 0, -7$?

b) Kaj pa zaporedje $3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2$ *in* $3, 1, 1, 1, 1, 1.5, -2$.

c) Naj bo

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Za neko 3×3 glavno podmatriko matrike B izračunaj njene lastne vrednosti in preveri ali prepletajo lastne vrednosti matrike A.

Izrek 1. *Naj bo A simetrična realna matrika. Tedaj lastne vrednosti vseh glavnih podmatrik A prepletajo lastne vrednosti matrike A.*

1.9. *V tej nalogi obravnavamo uporabo izreka o prepletanju za teorijo grafov.*

a) Naj bo A matrika sosednosti za nek graf G. Kaj predstavlja neka glavna podmatrika matrike A?

b) Naj bo C nek cikel v G. Pokaži, da je tedaj C induciran podgraf v $L(G)$.

c) Izračunaj lastne vrednosti za $L(P)$, kjer je P Petersenov graf.

d) Zaključi, da P nima hamiltonovega cikla.

Obstaja veliko drugih izrekov o prepletanju. Mi bomo omenili še enega, ki ga bomo formulirali kar s pomočjo teorije grafov. Za disjunktni podmnožici $V_1, V_2 \subset V(G)$ definiramo $E(V_1, V_2)$ kot število povezav med vozlišči iz V_1 in V_2.

Izrek 2. *Naj bo G nek graf in $V_1, \ldots, V_k$ neko razbitje množice $V(G)$. Definirajmo $k \times k$ matriko $X = (x_{i,j})$ da velja*

$$x_{i,j} = \begin{cases} \frac{E(V_i, V_j)}{|V_i|} & \text{če } i \neq j, \\ \frac{2E(V_i, V_i)}{|V_i|} & \text{sicer .} \end{cases}$$

Tedaj, lastne vrednosti matrike X prepletajo lastne vrednosti matrike sosednosti grafa G.

1.4 Štetje vpetih dreves

1.10. *Naj $\tau(G)$ označuje število vpetih dreves nekega grafa G.*

a) *Izračunaj $\tau(G)$ za graf na tabli.*

b) *Naj bodo G_1, G_2 bloka grafa G. Pokazi, da je $\tau(G) = \tau(G_1)\tau(G_2)$.*

c) *Pokazi zvezo $\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G/e)$.*

1.11. *Poišči število vpetih dreves v Petersenovem grafu.*

1.12. *Naj bo L Laplasova matrika za Petersenov graf. Označimo z L' matriko, ki jo dobimo tako, da iz L odstranimo poljuben stolpec in poljubno vrstico. Izračunaj $|\det(L')|$.*

1.13. *Dokaži zgornjo ugotovitev. Pokaži torej, da če je L Laplasova matrika za nek graf G potem je $\tau(G) = |\det(L')|$ pri cemer je L' matrika dobljena iz L z odstranitivijo poljubne vrstice in stolpca.*

Posledica 1. *Če so $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ lastne vrednosti za Laplasovo matriko grafa G, potem je*

$$\tau(G) = \frac{1}{n} \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$