1 Ogrevalne naloge iz teorije grafov

Pri vseh nalogah obravnavamo le *enostavne grafe*.

1.1. *Pokaži, da 2-obarvljiv graf nima lihih ciklov.*

1.2. *Naj $L(G)$ označuje graf povezav grafa G. Reši enačbo $L(G) = G$.* (Namig. Cauchy-Schwartz-ova neenakost.)

1.3. *Naj bo n pozitivno celo število. Pokaži, da obstaja sebi komplementaren graf reda n če in samo če $n \equiv 0, 1 \pmod 4$.*

1.4. *Pokaži, da če je G graf reda n, ki ne vsebuje trikotnika potem je*

$$|E(G)| \leq \frac{n^2}{4}.$$

Z drugimi besedami: vsak graf z več kot $\frac{n^2}{4}$ povezavami vsebuje trikotnik. Pokaži, da je meja tesna.

1.5. *Naj bo G graf z n vozlišči, ki ne vsebuje 4-cikla. Tedaj ima G kvečjemu $\frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$ povezav.*

1.6. *Naj bo G povezan graf. Pokaži, da imata poljubni dve najdaljši poti v G skupno točko.*

1.7. *Pokaži, da če ima graf most potem ima vsaj dve vozlišči lihe stopnje.*

1.8. *Naj bo G nek 2-povezan graf, ki ni dvodelen. Pokaži, da vsaka povezava G leži na nekem ciklu lihe dolžine.*

1.9. *Naj bo G nek graf reda n. Pokaži neenakost*

$$\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq n.$$

1.10. *V tej nalogi obravnavamo barvanja povezav polnega grafa z rdečo in modro barvo.*

a) *Pobarvaj povezave grafa K_5 tako, da graf ne bo vseboval niti modrega niti rdečega trikotnika.*

b) *Pokaži, da neglede na to kako pobarvaš povezave K_6 vedno dobiš ali modri ali rdeč trikotnik.*

c) *Naj bo $n > 8$. Pokaži, da ni mogoče pobarvati povezave K_n brez da bi dobil ali rdeč triktonik ali moder K_4.*

1.11. *Dokaži ali ovrzi - če ima graf G $n \geq 4$ vozlišč in vsaj $2n - 2$ povezav, potem ima G vsaj 2 različna cikla enakih dolžin.*

Izrek 1 (Cauchy Schwartz-ova neenakost)**.** *Za* $a_1, a_2, \dots a_n \in \mathbb{R}$ *velja*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2,$$

kjer enakost velja če in samo če $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.