1 Ogrevalne naloge iz teorije grafov

Pri vseh nalogah obravnavamo le *enostavne grafe.*

1.1. *Naj* $L(G)$ *označuje graf povezav grafa* G. *Reši enačbo* $L(G) = G$. (Namig. Cauchy-Schwartz-ova neenakost.)

1.2. *Naj bo* n *pozitivno celo število. Pokaži, da obstaja sebi komplementaren graf reda* n *če in samo če* $n \equiv 0, 1 \pmod 4$.

1.3. *Naj bo* G *nek* 2*-povezan graf, ki ni dvodelen. Pokaži, da vsaka povezava* G *leži na nekem ciklu lihe dolžine.*

1.4. *Naj bo* G *nek graf reda* n. *Pokaži neenakost*

$$\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq n.$$

1.5. *Dokaži ali ovrzi - če ima graf* G $n \geq 4$ *vozlišč in vsaj* $2n - 2$ *povezav, potem ima* G *vsaj 2 različna cikla enakih dolžin.*

1.6. *Naj bo* G *graf z* n *vozlišči in več kot* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *povezavami. Pokaži, da je tedaj* G *povezan.*

1.7. *Naj bo* G *nek* r*-regularen graf ožine* $2k + 1$. *Pokaži, da velja naslednja zgornja meja za število vozlišč grafa* G

$$|V(G)| \geq 1 + r + r(r-1) + \cdots + r(r-1)^{k-1}. \tag{1}$$

1.8. *Grafu ožine* $2k + 1$ *in diametra* k, *pravimo* Moorov graf. *Iskaže se, da so takšni grafi regularni in zadoščajo enakosti v* (1). *Poišči:*

a) *Dve neskončni družini Moorovih grafov.*

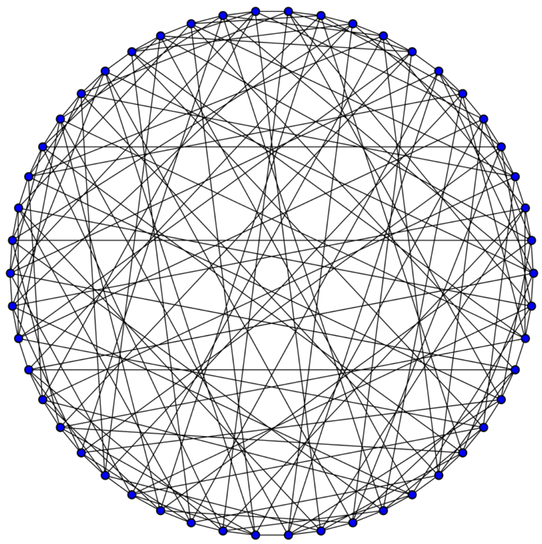
b) *Vse kubične Moorove grafe ožine 5.*

1.9. *Pokaži, da če za nek graf velja* $\mathrm{diam(G)} \geq 3$ *potem je* $\mathrm{diam}(\overline{\mathrm{G}}) \leq 3$.

1.10. *Pokaži, da ima hiperkocka* Q_d *vsaj* $2^{2^{d-2}}$ *popolnih prirejanj.*

1.11. *Pokaži, da je* $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *zaporedje stopenj vozlišč nekega drevesa če in samo če*

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2n - 2.$$



1.12. *Pravimo, da je graf G* hipohamiltonski *če je $G - v$ hamiltonski graf za vsak $v \in V(G)$ vendar G ni hamiltonski. Primer takšnega grafa je prikazan na sliki* **??**. *Pokaži*

a) *Če je G hipohamiltonski potem je $\delta(G) \geq 3$.*

b) *Hipohamiltonski graf ni nikoli dvodelen.*

Z uporabo zgornjih trditev poiščite hipohamiltonski graf na 10 vozliščih. (težje) Pokažite, da je najdeni graf najmanjši hipohamiltonski graf.

1.13. *Pokaži, da ima vsak povezan graf G vozlišče v da je $G - v$ povezan graf.*

1.14. *Pokaži, da je za $r > 1$ vsak povezan dvodelen r-regularen graf 2-povezan.*

1.15. *Naj bo G nek kubičen hamiltonov graf. Pokaži, da je G razreda I.*

1.16. *Naj bo G razreda I in H poljuben graf. Pokaži, da je tedaj $G \square H$ razreda II.*

1.17. *Naj bo G nek d-regularen graf za $d > 2$. Pokažite, da če subdividiramo poljubno povezavo grafa G dobimo graf razreda II.*

Izrek 1 (Cauchy Schwartz-ova neenakost)**.** *Za* $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ *velja*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2,$$

kjer enakost velja če in samo če $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.